Math. P.
16 m

Math. P.
16^m

Andreas
~~Weilbeck~~
aô 1780

Auszug
aus den
Anfangsgründen
der
Arithmetik
und
Buchstabenrechnung

Zum
Gebrauch der niedern Schulen
in den
churbaierischen Landen.

München
Gedruckt mit Churfürstl. akademischne
Schriften.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Aus den Anfangsgründen der Arithmetik und Algebra, die zu Vorlesungen in obern-Schulen bestimmt sind, hat man einen faßlichen Auszug zum Gebrauch der deutschen Realschulen wie auch der niedern lateinischen Schulen veranstaltet. Es werden in demselben nur die vornehmsten Erklärungen und gemeinnützigsten Aufgaben vorgetragen. Die Begriffe sowohl als die Aufgaben werden durch beygesetzte Beyspiele deutlich und prak-

tisch gemacht. Ueberall und besonders bey der Lehre von Proportionen wird zu den arithmetischen Handgriffen oder der welschen Praktik eine hinlängliche Anweisung gegeben, um dadurch dem Zweck bürgerlicher Schulen desto besser zu entsprechen. Ein Realschüler wenn er diese obschon kurzgefaßte Anleitung wohl inne hat, kann sich mit Grunde schmeicheln zu jeder Art des Nähr- und Gewerbstandes einen brauchbaren Vorrath arithmetischer Kenntnisse aus seiner Schule mit sich zu bringen. Schüler eines Gymnasiums werden, wenn sie in die obern Schulen tretten, dieser Anleitung vielen Dank wissen, da sie mit vorläufigen Begriffen und einer Fertigkeit in den nöthigsten Rechnungsarten, ausgerüstet, sich mit gutem Muth an erhabnere Lehren und mühsame Kalkulen wagen können. Beide sollen aber diese Blätter nicht auswendig hersagen, sondern verstehen lernen, dadurch wird ihnen diese kurze Schrift für allezeit gleich schäzbar und brauchbar bleiben. Der Anhang von der

Buch-

Buchstabenrechnung ist bloß für Schüler der Gymnasien, die in höhern Schulen die Analysis studiren werden, und keineswegs für Realschüler bestimmt.

München den 31. Jul. 1776.

Erste Abtheilung.

Auszug
Aus den Anfangsgründen
der
Arithmetik.

I. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 1. Erklärung einer Zahl und der Einheit — Eine Menge Dinge von einerley Art heißt eine Zahl. Jedes einzelne Ding für sich

selbst

selbst betrachtet, ist die **Einheit**. Z. B. Drey Europäer machen eine Zahl aus, denn es sind mehrere Menschen, die etwas, nämlich den Welttheil, als den Ort ihrer Geburt oder ihres Aufenthaltes miteinander gemein haben. Ein Deutscher, ein Franzose, ein Engländer können aber, als solche betrachtet, nicht zusammengezählt werden.

§. 2. **Von Veränderungen der Zahlen** — Wenn zu einer Zahl Einheiten eben derselben Art gesetzt, oder von ihr weggenommen werden, so ist die Zahl nicht mehr eben dieselbe, oder sie leidet eine Veränderung. Im ersten Falle wird sie **vermehrt**, im zweyten **vermindert**. Z. B. Es ist klar daß die Zahl von dreyßig Schülern nicht eben dieselbe verbleiben kann, wenn dazu noch andere sechs aufgenommen, oder davon entlassen werden.

§. 3. **Erkl. der Addition** — Man **addiret**, wenn man zu einer Zahl eine andere einmal hinzusetzet, und dadurch eine Zahl er-

erhält, die so groß ist, als die gegebenen Zahlen zusammen genommen. Die gegebenen Zahlen, welche man zusammenzählt, heißen die **summirenden** Zahlen, oder auch **Posten**: die gefundene Zahl, die den summirenden zusammen genommen gleich ist, nennt man die **Summe**. Z. B. Sechse zu zehen macht Sechszehen. Sechse und zehen sind also die summirenden Zahlen; Sechszehen ist die Summe.

§. 4. **Erkl. der Multiplication** — Man **multipliciret**, wenn man eine Zahl etlichemal zu sich selbst addiret, und dadurch eine dritte erhält. Die Zahl, welche man zu wiederholtenmalen zu sich selbst addiret, heißt der **Multiplicandus**: die andere, welche anzeigt, wie oft die erste zu sich addirt werden soll, heißt der **Multiplicator**, beide aber zusammen nennt man **Factores**. Die dritte endlich, welche auf solche Art heraus kömmt, heißt das **Factum** oder **Product**. Z. B. Dreymal vier macht

zwölf

zwölf. Vier ist also der Multiplicandus, drey der Multiplicator, zwölf das Product.

§. 5. **Erkl. der Subtraction** — Man **subtrahiret**, wenn man eine gegebene Zahl von einer andern einmal hinwegnimmt, damit man wisse, was nach geschehener Operation übrig bleibt. Die Zahl, welche übrig bleibt, heißt der **Rest** oder die **Differenz** Z. B. Vier von zehen bleibt sechs. Sechs ist also die Differenz oder der Unterscheid.

§. 6. **Erkl. der Division** — Man **dividiret**, wenn man von einer gegebenen Zahl eine andere so oft abziehet, als es möglich ist. Die Zahl, von welcher eine andere etlichmal abgezogen wird, heißt der **Dividendus**, die Zahl, welche abgezogen wird der **Divisor**, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor vom Dividendus sey abgezogen worden, und also, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten war, der **Quotient**. Z. B. Zwey in sechs ist dreymal enthalten. Sechs ist also der Dividen-

dus, zwey der Divisor, und drey der Quotient.

§. 7. **Von den Zeichen der arithmetischen Operationen** — Alle Veränderungen, welche mit den Zahlen können vorgenommen werden (§. 2.), beruhen auf der Addition und Multiplication, Subtraction und Division. Diese erklärten Rechnungsarten heißt man die **vier Species der Rechenkunst**, oder die **vier arithmetischen Operationen.** Um ganz kurz anzuzeigen, wenn eine dieser Operationen mit den gegebenen Zahlen soll vorgenommen werden, hat man willkührliche Zeichen derselben angenommen. **Das Zeichen der Addition** ist (+). Z. B. Sechs + drey, heißt so viel als Sechs zu drey addirt. Man lieset auch Sechs **plus** drey, oder Sechs **und** drey, oder Sechs **zu** drey. **Das Zeichen der Subtraction** ist (—). Z. B. Sechs — drey, heißt von Sechs drey subtrahirt, auch Sechs **minus** oder **weniger** drey. **Das Zeichen der Multiplication**

ist (×) oder (.). Z. B. Sechs × drey heißt Sechs multiplicirt mit drey oder dreymal Sechs. **Das Zeichen der Division** ist (:). Z. B. Sechs : drey heißt Sechs dividirt durch drey. Bey der Division zieht man auch öfters eine Querlinie, und oben setzt man den Dividendus, unten den Divisor. **Das Gleichungszeichen** ist (=). Z. B. Sechs = vier + zwey heißt, daß diese zwo Größen Sechs und vier + zwey einander gleich sind.

§. 8. **Von den Ziferu** — die ersten neun Zahlen drückt man durch besondere Zeichen aus; als 1 heißt Eins, 2 zwey, 3 drey, 4 vier, 5 fünf, 6 sechs, 7 Sieben, 8 Acht, 9 Neun. Diese Zeichen der Zahlen nennt man **Zifern**. Ein solches Zahlzeichen oder eine Zifer, wenn sie allein stehet, oder in einer ganzen Reihe die erste Stelle gegen die rechte Hand einnimmt, bedeutet einzelne Einheiten, und heißt daher ein **Einer**. Eine Zifer in der zweyten Stelle von der Rechten gegen die Link, bedeutet

zehen

zehen einfache Einheiten, und heißt ein **Zehner**. Eine Zifer in der dritten Stelle bedeutet zehenmal so viele Einheiten, als die in der zweyten Stelle oder zehenmal zehen und heißt ein **Hunderter**. Eine Zifer in der vierten Stelle bedeutet zehenmal hundert, und heißt ein **Tausender**. Eine Zifer in der fünften Stelle bedeutet zehenmal so viel als die in der vierten Stelle, und also **zehentausend**. Eine Zifer in der sechsten Stelle bedeutet zehenmal soviel, als die in der fünften Stelle und also **hunderttausend**. Eine Zifer in der siebenden Stelle bedeutet zehenmal so viel als die in der sechsten Stelle, und also **tausendmaltausend** oder eine **Million**, Millionmalmillion heißt eine **Billion**; millionmalbillion eine **Trillion** u. s. w. Man kan also mit den obigen neun Zifern alle Zahlen ausdrücken, wenn man in **Ansehung ihrer Stellung** das **Gesetz** annimmt, daß eine Zifer allein einzelne Einheiten bedeute; wenn aber diese Zifer um eine Stelle weiter von der Rechten gegen die Linke gesetzt wird, sie allezeit

zehen-

zehenmal mehr bedeute, als die vorgehende. Um zu wissen, daß eine Zifer weiter gegen die Linke gerückt worden sey, nimmt man die Null oder (o) als ein solches Zeichen an. Z. B. 6240359 sind nach dem gesagten 9 Einer, 5 Zehner, 3 Hunderter, kein Tausender, 4 Zehentausend, 2 hunderttausend, 6 Millionen.

* Die angeführten neun Zahlzeichen sind eine Erfindung der Araber. Statt derer nahmen die alten Römer einige lateinische Buchstaben an. I. oder 1. II-2. III-3. IV-4. V-5. VI-6. VII-7. VIII-8. IX-9. X-10. XI-11. L-50. LX-60. C-100. D-500. M. 1000. MDCCLXXVI-1776.

§. 9. **Von Numeriren** — **Numeriren** heißt eine Zahl, die mit Zifern geschrieben ist, aussprechen können. Die Regeln hiezu sind folgende.

I. Man theile eine gegebene Reihe von

Zifern von der Rechten gegen die Linke in Klassen ab, deren jede sechs Zifern enthält, und mache über der ersten Klasse, um dem Gedächtniß zu Hülfe zukommen, einen Strich oder Punct, über der zweyten Klasse zween Striche u. s. f.

II. Jede dieser Klassen theile man wieder in zwo andere Klassen von drey Zifern, und bemerke dieses allezeit durch einen einfachen Strich unterhalb der Zahl.

III. Man lese hierauf jede Klasse von drey Zifern, doch so, daß man bey der welche linker Hand stehet, anfängt, und da, wo der Strich unterhalb stehet, allemal tausend, wo einer oben stehet, Million, wo zween oben stehen, Billion, wo drey, Trillion, die übrigen Zifern aber nach §. 8. ausspricht. Z. B.

67′|924,604

2|438,″501′|462,794

9‴|634,920″|098,010′|435,287

Die erste Zahl würde also ausgesprochen werden: Sieben und sechzig tausend Millionen, neunhundert vierundzwanzigtausend, sechshundert und vier; die dritte: Neun Trillionen; sechshundert vier und dreyßigtausend, neunhundert zwanzig Billionen acht und neunzigtausend und zehen Millionen, vierhundert fünfunddreyßigtausend, zweyhundert sieben und achtzig.

* Um aller Verwirrung bey Aussprechung der Zahlen vorzubeugen, so muß man auch auf dieses merken, daß wir Deutschen die kleinere Zahl vor der größern sprechen. Z. B. 24 heißt eigentlich zwanzig vier, wir sprechen aber vier und zwanzig. In Wechseln und Quittungen, wo nämlich die Zahlen mit Worten ausgeschrieben werden, schreibt man die größere Zahl voraus.

* * Wenn man eine mit Worten vorgesagte große Zahl mit Zifern aufschreiben will, so muß man sich eine ganze Zahl, oder doch eine Klasse derselben hersagen lassen, als-

dann für die gehörigen Abtheilungen nach den gegebenen Regeln die Striche machen, und jede Zifer an die ihr zukommende Stelle setzen. Doch dieß läßt sich viel leichter durch fleißige Uebung als durch die weitläuftigsten Regeln erlernen.

§. 10. Aufgabe. Verschiedene Zahlen zu addiren.

Aufl. I. Man schreibe die Zahlen, die man addiren soll, so untereinander, daß die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner, die Hunderter unter die Hunderter u. s. w. untereinander zu stehen kommen, und ziehe einen Strich.

II. Man zähle erstens die Einer, nachmals die Zehner, Hunderter rc. zusammen, und schreibe die Summe unter die Reihe der zusammengezählten Zifern.

III. Wenn die Summe der Einer ein oder mehr Zehner, die Summe der Zehner ein oder mehr Hunderter rc. enthält;

so

so addire man diese sogleich zu den gegebenen Zehnern, Hunderten u. s. w. Diese einzeln gefundenen Summen geben die gesuchte Summe aller gegebenen summirenden Zahlen.

Exempel.

3642	3578	759384
390	524	364102
2458	63	483917
24	———	529436
———	4165	———
6514		2136839

§. 11. **Von den genannten Zahlen** — Genannte Zahlen heißen diejenigen, derer Einheiten, auf welche sie sich beziehen, genennt sind. Dergleichen sind beym **Gewichte**, wo ein Centner 100 Pfund, 1 Pfund 4 Vierlinge, ein Vierling 8 Loth, ein Loth 4 Quintchen hat. Bey verschiedenen baierischen **Geldsorten**; ein großer Thaler gilt bey uns 2 fl. 24 kr., ein Gulden 2½ Kopfstück, ein Kopfstück 2 Zwölfer, ein Zwölfer 4 Groschen, ein Groschen 3 Kreutzer, ein Kreutzer 4 Pfenninge. Bey

den Maaßen, als bey dem **Wein und Biermaaße**; das Fuder hält 12 Eymer, der Eymer 60 Maaß, die Maaß 4 Quärtchen; beym **Getraidemaaße** hält ein Schäffel 6 Metzen, beym Haber aber 7 derselben; ein Metzen 4 Viertel, ein Viertel 4 Sechszehntheile. Die **Zeit** theilt man in Jahre, wovon eines 365 Tage, ein Tag 24 Stunden, eine Stund 60 Minuten, eine Minute 60 Secunden enthält. Bey Ausmessung der **Längen** im Feldmessen gebraucht man Stäbe oder Klafter. Der Stab ist 6 Schuhe lang; der Schuh 12 Zolle, der Zoll 12 Linien.

Anm. Es giebt noch andere Benennungen der Einheiten, die bey uns doch selten vorkommen. Z. B. Ein Schock hält 60 eine Steige 20, ein Mandel 15 Stücke. Eine Last enthält beym Getreidemaaß 3, bey Gersten und Haber 2 Winspel; ein Winspel 2 Malter oder 24 Scheffel. Beym Weinmaaß enthält ein Fuder 4 Oxhoft, ein Oxhoft $1\frac{1}{2}$ Ohm, 1 Ohm 2 Eymer. Beym Gold-

und

und Silbergewichte hält ein Mark 8 Unzen, eine Unze 2 Loth, ein Loth 6 Gran, ein Karat 4 Gran. Beym Schifsgewichte hat eine Last 12 Schifspfund, ein Schifspfund 20 Ließpfund, ein Ließpfund 14 Pfund. Beym Apotheckergewichte hält ein Pfund 12 Unzen, eine Unze 8 Drachma, ein Drachma 3 Scrupel, ein Scrupel 20 Gran.

§. 12. **Von der Addition der gegenannten Zahlen** — Die Regeln kommen mit denen von der Addition überhaupt §. 10, überein. Nur ist zu merken, daß man, so oft kleinere Einheiten ein ganzes von Einheiten höherer Ordnung ausmachen, dasselbe jedesmal zur höheren Reihe setze. Z. B. Weil in 13 Pfenningen 3 ganze Kreutzer enthalten sind; so muß man sie auch zu den Kreutzern setzen.

I. Exempel.

12 fl.	13 gr.	2 kr.	3 pf.
6	19	1	1
23	6	0	2
42	19	1	2

II. Exempel.

6 Ctr.	52 ℔.	29. L.	4. Qt.
4	23	6	1
3	46	2	0
14	22	6	0

§. 13. Von Proben der Addition — Bey der Addition und allen Rechnungsarten ist es das beste, das schon berechnete nochmal zu überrechnen. Bey der Addition kann man das zweytemal von oben an die Rechnung anfangen. Die Neunerprobe und dergl. sind bekannt, und können auch in den Anfangsgründen der Arithmetik §. 33. nachgesehen werden.

§. 14. Aufg. Eine kleinere Zahl von der größern zu subtrahiren.

I. Man schreibe, wie bey der Addition (§. 10. I.) die Zifern gehörig untereinander, doch so, daß die größere Zahl oben, die kleinere unten zu stehen komme, und ziehe einen Strich.

II.

II. Man subtrahire nun die Einer von den Einern, die Zehner von den Zehnern, ꝛc. und schreibe jedesmal den Ueberschuß unter die Reihe dieser Einheiten.

III. Wenn eine größere Einheit von einer kleinern weggenommen werden soll, so entlehne man von einer Zifer der höheren Ordnung eine Einheit, die zehen gilt, und vermehre die kleinere Zahl durch diese zehen, wodurch also die Subtraction geschehen kann.

IV. Wenn die nächst höhere Stelle von der die Einheit geborget werden soll, eine Nulle enthält, so gehe man weiter gegen die Linke, bis man eine Zahl antrift, von der man die Einheit borgen kann. Dadurch wird diese und alle dazwischen liegende Nullen in 9 verwandelt.

Exempel.

I.	4625	II.	3627040001
	2432		2734202243
	2193		892837758
	4625		3627040001

§. 15. Von der Subtraction in genannten Zahlen — Nebst Anwendung der allgemeinen Regeln der Subtraction §. 14. hat man zu bemerken, daß die von einer höheren Ordnung geborgte Einheit nicht 10; sondern soviel gilt, als die Einheit der größeren Ordnung kleinere Einheiten enthält. Eine Einheit von den Gulden für die Stelle der Groschen geborgt, gilt 20, den 20 Gr. machen einen Gulden.

I. Exempel.

15 fl.	3 gr.	9 pf.
4	18	11
10	14	10

II. Exempel.

Ein Mensch ist 1740 den 12 Jul. gebohren und 1776 den 25 Sept. gestorben. Wie lange hat er gelebt?

	1776 Jahr	8 Monat	25 Tage
	1740	6	12
das Alter	36 J.	2 M.	13 T.

§. 16. **Von der Probe der Subtraction** — Man addire die Differenz mit der kleinern gegebenen Zahl, die Summe muß die größere Zahl geben, von der subtrahirt worden ist.

§. 17. **Von dem Einmaleins Täfelchen.** — Es wird dieses gemeiniglich im darunter stehenden Täfelchen vorgestellet. Wie solches verfertiget werde, sehe man in den A. d. A. der Gebrauch desselben bestehet darinne, daß, wenn man das Product von zweenen Factoren (§. 5.) wissen will, man den einen Factor in der ersten Reihe nach der Breite, den andern Factor in der vordersten Reihe nach der Länge suchen muß. Fährt man nun mit den Fingern zusammen, so findet man das Product in dem Fache, wo man mit beiden Fingern zusammen trift. Um aber in der Rechenkunst eine Fertigkeit zu haben, ist es schlechterdings nothwendig, das Einmal Eins auswendig zu lernen, welches leicht ist, wenn man nur mehrere Tage hindurch dasselbe mit Aufmerksamkeit lieset.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 18. Aufg. Eine Zahl durch eine andere zu multipliciren.

A. Im Falle, daß der Multiplicator nur eine Zifer enthält.

I. Man multiplicire mit Hülfe des Einmaleins jede Zifer des Multiplicandus von der Rechten zur Linken durch den Multiplicator.

II. Jedes einzelne Product schreibe man unter die Zifer des Multiplicandus, daraus es entstanden ist. Wenn das einzelne Pro-

duct

duct aus mehr Zifern bestehet, so setze man die niedrigste an den eben erwehnten Ort; die Zifer der höheren Ordnung dieses Productes behalte man auf, und, wenn man die Zifer der nächst höhern Ordnung des Multiplicandus multiplicirt, so addire man dieselbe zu dessen Product. Diese einzelnen Producte zusammen genommen geben das gesuchte ganze Product.

Exempel.

I.	7123	II.	3549
	3		8
	21369		28392

B. Im Falle, daß der Multiplicator mehrere Zifern enthält.

I. Nach den eben gegebenen Regeln suche man das Product eines jeden Theiles des Multiplicators, und schreibe dasselbe so, daß die niedrigste Zifer dieses Products gerade unter die Zifer des Multiplicators, von der es herrührt, zu stehen komme.

II. Alle diese einzelne Producte fasse man durch die Addition in eine Summe. Dadurch erhält man das ganze Product.

I.		II.	
	1725		23436
	64		825
	6900		117180
	10350		46872
	110400		187488
			19334700

C. Im Falle, daß der Multiplicator Nullen enthält.

I. Wenn beym Multiplicator in der Mitte Nullen vorkommen, so übergehe man sie, und multiplicire mit der folgenden Zahl.

II. Wenn aber der Multiplicator oder der Multiplicandus, oder auch beide am Ende Nullen haben, so multiplicire man nur mit den wirklichen Zahlen, die Nullen aber hänge man an das Product.

I.	II.	III.
1527	876	32640
304	400	27000
6112	350400	22848
4584		7528
464512		881280000

§. 19. **Von der Multiplication in genannten Zahlen** — Man multiplicire nach den gegebenen Regeln mit dem Multiplicator alle Zahlen der gegebenen Einheiten, und reducire jede kleinere zur größeren (§. 11 und 12.).

Exempel.

I. 21 fl.	28 kr.	5 hl.
		3
63	84	15

Durch die Reduction wird dieses Product in 64 fl. 25 kr. 7 hl. abgeändert.

II. 5 Ctr.	58 pf.	19 L.
		6
30	348	114

Nach

Nach der Reduction erhält man 33 Ctr. 51 pf. 18 L.

§. 20. **Von der Probe der Multiplication** — Die beste Art derselben ist die Division des Products durch den einen Factor, wodurch der andere Factor zum Quotienten erhalten wird. Sie setzt also die Kenntniß der Regeln der Division zum voraus, die in folgender Aufgabe vorgetragen werden.

§. 21. **Aufg. Eine größere Zahl durch die kleinere zu dividiren.**

A. **Im Falle, daß der Divisor nur eine Zifer hat.**

I. Man setze den Divisor zur Linken und sondere ihn durch einen Strich vom Dividendus ab; so wie man zur Rechten einen Strich macht, um den Quotienten dahinter zu setzen.

II. Vermittelst des Einmaleins, such man

man, wie vielmal der Divisor in der ersten, oder, wenn dieser größer ist, in den ersten zwoen Zifern des Dividendus gegen die Linke enthalten sey.

III. Die gefundene Zahl multiplicire man mit dem Divisor, und schreibe das Product unter die erste oder beiden ersten Zifern des Dividendus.

IV. Dieß Product ziehe man vom Dividendus ab; setze neben dem Rest die Zifer der nächst niedern Ordnung des Dividendus, und erforsche aufs neue, wie vielmal der Divisor in dieser Zahl enthalten sey.

V. Wenn der Divisor in dem Rest und der dazu kommenden neuen Zifer nicht enthalten ist, so setze man in den Quotienten eine Nulle, und nehme zu dieser Zifer des Dividendus die nächstfolgende Zifer.

Exempel.

```
I. 8 | 13456 | 1682
       8
       ──
       54
       48
       ──
        65
        64
        ──
         16
         16
         ──
          0

II. 7 | 6314 | 902
        63
        ────
         014
          14
          ──
           0
```

B. Im Falle, daß der Divisor mehrere Zifern hat.

I. Man suche, wie vielmal die erste Zifer des Divisors in der ersten oder den zwoen ersten Zifern des Dividendus enthalten sey, und setze die angenommene Zahl zur Rechten als den ersten Theil des Quotienten.

II.

II. Diesen gefundenen Quotienten multiplicire man mit dem ganzen Divisor, und ziehe das Product von dem dividirten Theile ab.

III. Wäre dieß Product zu groß, und ließe es sich nicht abziehen; so ist der Quotient zu groß: man nehme also einen kleineren. Ist aber der Ueberrest größer als der Theil des Divisors, von dem man subtrahiren soll, so müßte in diesem Falle ein grösserer Quotient genommen werden.

IV. Man nehme die darauffolgende Zifer des Dividendus; setze sie neben dem Rest, und verfahre auf die vorige Art.

Exempel.

```
325 | 68753425 | 211549
      650
      ---
       375
       325
       ----
        503
        325
        ----
        1784
        1625
        -----
         1592
         1300
         -----
          2925
          2925
          ----
             0
```

§. 22. Von dem dividiren Ueber sich — Die beschriebene Art zu dividiren nennt man **Unter sich dividiren**, weil alle Producte hier ordentlich hingeschrieben werden. Man kann aber auch diese Producte in Gedanken behalten, und abziehen. Die Ueberreste setzet man alsdann allemal über die Zahlen, und die Zifern, die man dividirt hat, pflegt man, um die Verwirrung aus-

auszustreichen. Diese Methode heißt man Ueber sich dividiren, und sie hat bey denen, die durch Uebung eine Fertigkeit im Rechnen sich zuwegen gebracht haben, viele Vorzüge. Bey der ersten Art zu dividiren, können aber die gemachten Fehler im Multipliciren oder Subtrahiren leicht vermieden werden. Deswegen paßt sie auch mehr für Anfänger.

Exempel.

```
      |2 2   3  |
I.  4 |6 2 3 5 6| 1 5 5 8 9

         5 6 1  |
II.    1 3 4 5 6| 1 6 8 2
         8 8 8 8|
```

§. 23. Ein Paar Anmerkungen — Wenn der Divisor am Ende Nullen hat, so kann man, die Berechnung abzukürzen, dieselben wegstreichen. Man muß aber alsdann auch von dem Dividendus eben so viel Ziffern bey der Division weglassen. Haben beide, der Divisor sowohl als Dividen-

dus am Ende Nullen, so kann man von einem jeden gleich viel wegstreichen. Die ausgelassenen Nullen oder weggestrichenen Zifern, setzt man zum letzten Rest. Es fügt sich nämlich sehr oft, daß der Divisor nicht genau im Dividendus enthalten sey, und also nach der letzten Subtraction noch ein Rest bleibe. Diesen Rest pflegt man neben dem Quotienten, als den Zähler eines Bruches, der den Divisor zum Nenner hat, anzusetzen.

Exempel.

```
2 ø ø | 5 2 7 4 ø | 2 6 3 140/200
      | 4         |
        ---
        1 2
        1 2
        -----
          0 7
            6
        -------
            1 4 0
```

§. 24. **Von der Division der genannten Zahlen** — Mit dem gegebenen Divisor dividire man nach den gemeinen Re-

Regeln alle Zahlen der verschiedenen Einheiten. Man fängt aber bey der Einheit der höhsten Ordnung an. Was übrig bleibt, das setze man zu der Einheit der nächst kleineren Art, und fahre auf diese Weise in der Division fort.

Exempel.

Dividendus	15 fl.	7 gr.	4 pf.
Divisor	4		
Quotient	3	16	10

§. 25. **Von der Probe der Division** — Wie man die Probe der Multiplication durch die Division macht (§. 20.), so wird die Probe der Division durch die Multiplication gemacht. Man multipliciret nämlich den Divisor mit dem Quotienten. Ist das Product derselben dem vorhin gegebenen Dividendus gleich, so ist richtig dividirt worden. Wenn bey der Division noch etwas übrig geblieben, so addire man den Rest zum Product.

Exempel.

6	3 5 0	5 8
	3 0	6
	5 0	3 4 8
	4 8	2
	2	3 5 0

II. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten in gebrochenen Zahlen.

§. 26. Erkl. einer gebrochenen Zahl oder eines Bruches — Ein Bruch entstehet, wenn ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilet wird, und deren einer oder einige genommen werden. Ein solches Stück wird nämlich in Vergleichung mit dem Ganzen ein Bruch genennt. Z. B. einen Groschen kann man auch in zwölf Theile eintheilen. Nimmt man nun einen von diesen Theilen, so hat man ein zwölftheil dieses Groschens oder einen Pfenning. Ein pf. ist also ein zwölftheil eines Gr. zween pf. sind

zwey zwölftheil eines gr. u. s. w. Sie sind also in diesem Falle Brüche.

§. 27. **Erkl. des Nenners und Zählers eines Bruches** — Zu einem Bruch gehören zwo Zahlen. Eine, die anzeigt, in wie viel Theile das Ganze ist getheilet worden; und die andere, welche bestimmt, wie viel dieser Theile sind genommen worden, oder auf den Bruch gehen. Das erste zeigt der **Nenner** an; das zweyte bestimmt der **Zähler**. Man setze diese zwo Zahlen so an, daß der Zähler über, der Nenner unter den Strich zu stehen komme. Z. B. $\frac{1}{12}$ Gr. heißt ein zwölftheilgroschen; denn der Nenner 12 zeigt an, in wie viel Theile der Groschen ist eingetheilet worden, der Zähler 1 zeigt an, wie viel dieser Theile sind genommen worden.

§. 28. **Von Eintheilung der Brüche** — Der Zähler kann dem Nenner gleich, oder größer als derselbe seyn; z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, in welchem Falle der Bruch ein **unächter**

uneigentlicher heißt. Ist aber der Zähler kleiner als der Nenner, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, so heißt der Bruch ein ächter oder eigentlicher. Ferner sind oft den Brüchen ganze Zahlen angehängt, z. B. $3\frac{1}{4}$; alsdann heißen sie gemischte Brüche. Stehen sie aber ohne dieselben, so nennt man sie reine Brüche.

§. 29. Aufg. Einen Bruch in einen andern zu verwandeln, ohne daß dessen Werth geänderet werde.

Aufl. Man multiplicire, oder dividire den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch einerley ganze Zahl, so bleibt die Größe des Bruchs unverändert. Z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$, oder $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

§. 30. Aufg. Einen Bruch aufzuheben; das ist, einen Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken, ohne daß sein Werth geändert werde.

Aufl.

Aufl. Man dividire sowohl den Nenner als Zähler durch einerley Zahl. Z. B. $\frac{22}{102} = \frac{22:2}{102:2} = \frac{11}{51}$.

§. 31. **Von einigen praktischen Regeln, um die Zahlen, wodurch sich Zähler und Nenner dividiren lassen, zu finden.** — Diese sind: a.) Wenn die letzte Ziffer des Zählers und Nenners sich durch 2 oder 5 oder 10 dividiren läßt; so läßt sich auch der ganze Zähler und der ganze Nenner dadurch dividiren. Z. E. $\frac{5342}{6894} = \frac{2671}{3447}$; $\frac{875}{320} = \frac{151}{64}$; $\frac{870}{950} = \frac{87}{95}$. b.) Wenn man jede Zifer im Nenner und Zähler als einzelne Zifern ansieht, solche besonders addiret, und alsdann findet, daß die Summe lauter Neuner enthält; so läßt sich auch Zähler und Nenner durch 9 dividiren. Z. B. $\frac{5499}{8172}$. Denn wenn man hier die einzelnen Zifern zusammenzählte, so wären im Zähler 3 Neuner und im Nenner 2 Neuner, ohne daß etwas übrig bleibt. Man kann also beide durch 9 dividiren, und kleiner machen. Dadurch würde dieser Bruch

$= \frac{611}{908}$. c.) Wenn man Zähler und Nenner in ihre Factoren, aus deren Multiplication sie entstanden sind, auflösen kann, und die gemeinschaftlichen Factoren ausstreicht, so wird gleichfalls ein Bruch kleiner gemacht. Z. B. $\frac{45}{360} = \frac{5 \times 9}{4 \times 9 \times 2 \times 5} = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$. Doch ist es für Anfänger schwer, die Producten in ihre einzelne Factoren zu zerlegen. Im zweyten Theile des **mathematischen Lexikon** S. 530. ist eine Tafel enthalten, wodurch man sich die Mühe erleichtern kann. — Endlich ist zu merken, daß oft Zähler und Nenner so beschaffen sind, daß sie sich durch keine dritte Zahl als allein durch 1 dividiren lassen, ohne daß beide oder doch einer wieder ein Bruch würde. Z. B. $\frac{15}{64}$, wenn man beide durch 2 dividirt, so erhielte man $\frac{7\frac{1}{2}}{32}$. In diesem Falle hätte der Bruch den Sinn, daß das Ganze in 32 Theile soll getheilet, und von diesen Theilen 7 und $\frac{1}{4}$ sollen genommen werden. Solche Brüche nennt man **doppelte** oder **gebrochene Brüche**.

§. 32. Aufg. Den größten gemeinschaftlichen Divisor zwoer Zahlen, oder den größten Theiler des Bruches; das ist, eine Zahl zu finden, durch welche man den Bruch sogleich in den möglichst kleinsten von gleichem Werthe verwandeln kann.

Aufl. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere (in eigentlichen Brüchen also den Zähler durch den Nenner), und bemerke den Rest, und fahre auf diese Art beständig fort, bis kein Rest mehr übrig bleibt. Der letzte Divisor ist alsdann der größte gemeinschaftliche Divisor der zwo gegebenen Zahlen oder des Bruches. Es sey z. B. $\frac{182}{1145}$ gegeben, man suche deu größten Theiler des Bruches. Es wird also

I. 182 | 2145 | 11   II. 143 | 182 | 1
| 182 | | 143 |
325   Rest 39
182
Rest 143

III. 39 | 143 | 3.   IV. 26 | 39 | 1
| 117 | | 26 |
Rest 26   Rest 13

V. 13 | 26 | 2
| 26 |
0

Weil nun in V, wo 13 der Divisor ist, nichts mehr bleibt, so ist diese Zahl der größte Theiler, und der Bruch läßt sich durch 13 aufheben, denn es wird $\frac{182}{2145} = \frac{14}{165}$.

§. 33. Aufg. Zween oder mehrere Brüche, welche verschiedene Nenner haben, unter einerley Benennung zu bringen, so, daß der Werth der Brüche nicht geändert werde.

Aufl.

Aufl. Sind zween Brüche gegeben, so multiplicire man den Zähler und Nenner des erstern durch den Nenner des andern; und alsdann den Zähler und Nenner des andern Bruches durch den Nenner des erstern, so bekömmt man zween neue Brüche, die den vorigen gleich sind. Z. B. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ $= \frac{2\times5}{3\times5}$; $\frac{4\times3}{5\times3} = \frac{10}{15}$; $\frac{12}{15}$. Sind **mehrere Brüche** unter einerley Benennung zu bringen, so multiplicire man den Zähler und Nenner eines jeden Bruches durch ein Product aus allen übrigen Nennern. Z. B. $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7} = \frac{1\times3\times7}{2\times3\times3}$; $\frac{2\times2\times7}{3\times2\times7}$; $\frac{4\times2\times3}{7\times2\times3} = \frac{21}{42}$; $\frac{28}{42}$; $\frac{24}{42}$.

§. 34. Von der Reduction einer ganzen Zahl zu einerley Benennung mit einem Bruch — Wenn eine ganze Zahl zu einerley Benennung mit einem Bruche soll gebracht werden; so muß man die ganze Zahl durch den Nenner des gegebenen Bruches zugleich multipliciren und dividiren. Sie bekömmt dadurch den nämlichen Nenner des Bruches. Z. E. 4; $\frac{2}{3} = \frac{4\times3}{3}$; $\frac{2}{3} = \frac{12}{3}$; $\frac{2}{3}$.

§. 35. Von Einrichtung gemischter Brüche (§. 28.), oder wie man dieselbe in unächte reine Brüche verwandeln könne. — Man multiplicire die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, welcher derselben angehängt ist, und addire zu dem Product den Zähler dieses Bruches. Z. B. $3\frac{2}{3} = \frac{3 \times 3 + 2}{3} = \frac{11}{3}$. Es ist aber $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$. Hieraus sieht man, wie man **einen unächten Bruch wieder in einen gemischten** verwandeln könne.

§. 36. Von Vergrößerung oder Verminderung eines Bruches — Man kann einen Bruch auf zweyerley Art größer machen. Entweder man läßt den Nenner unverändert, und vermehrt den Zähler; oder man läßt den Zähler unverändert, und vermindert den Nenner. Z. B. $\frac{3}{7}$ wird größer, wenn daraus $\frac{5}{7}$ oder $\frac{3}{4}$ gemacht werden. Eben so wird ein Bruch auf zweyerley Art kleiner gemacht, wenn man entweder den Zähler vermindert, und den Nenner unverändert läßt; oder wenn man den Zähler un-

ver-

verändert läßt, und den Nenner vermehrt; z. B. $\frac{4}{5}$ wird kleiner, wenn daraus $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{7}$ gemacht werden. Die Beweise dieser Sätze können in den Anfangsgründen selbst §. 60 und 61 nachgesehen, durch Theilung aber z. B. eines Stücks Papier den Anfängern erläutert werden.

§. 37. Aufg. Brüche zu addiren.

Aufl. Wenn die gegebenen Brüche, die addirt werden sollen, schon einerley Nenner haben, so addire man nur ihre Zähler, und schreibe die gemeinen Nenner unter die Summe. Wenn sie aber nicht einerley Nenner haben, so bringe man sie erst unter eine Benennung (§. 33.), und verfahre, wie vorher.

Exempel.

I. $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$

II. $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$.

§. 38. Von der Addition einer

gan-

ganzen Zahl eines Bruches. — Wenn man eine ganze Zahl zu einem Bruch addiren soll; so verwandle man die ganze Zahl nach §. 34 in einen unächten Bruch, der mit dem gegebenen Bruch einerley Benennung hat. Alsdann verfahre man nach §. 37.

Exempel.

$$15 + \frac{3}{8} = \frac{15 \times 8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{120}{8} + \frac{3}{8} = \frac{123}{8}.$$

§. 39. **Von der Addition gemischter Brüche** — Wenn gemischte Brüche (§. 28.) addirt werden sollen, so addire man zuerst die den ganzen Zahlen angehängten Brüche, alsdann die ganzen Zahlen allein. Zur letzten Summe addire man noch die ganzen Einheiten, welche aus den zusammengezählten Brüchen entstanden sind.

Exempel.

$$3\tfrac{1}{2} + 5\tfrac{2}{3} + 6\tfrac{3}{4} = 15\tfrac{11}{12}.$$

§. 40. Aufg. **Brüche voneinander zu subtrahiren.**

Aufl.

Aufl. Wenn die gegebenen Brüche, die voneinander subtrahirt werden sollen, einerley Nenner haben; so subtrahire man die Zähler voneinander, und unter die Differenz der Zähler setze man den gemeinschaftlichen Nenner. Wenn aber die gegebenen Brüche nicht einerley Nenner haben; so bringe man sie erst zu einerley Benennung (§. 33.), und dann verfahre man, wie eben ist gesagt worden.

Exempel.

I. $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$.

II. $\frac{5}{8} - \frac{2}{7} = \frac{35}{56} - \frac{16}{56} = \frac{35-16}{56} = \frac{19}{56}$.

§. 41. **Von der Subtraction eines Bruches von einer ganzen Zahl.** — Wenn man einen Bruch von einer ganzen Zahl abziehen soll, so verwandle man erst die ganze Zahl in einen unächten Bruch von einerley Benennung mit dem gegebenen (§. 34.); alsdann subtrahire man nach vorgetragener Regel (§. 40.).

Exempel.

$7 - \frac{13}{16} = \frac{7 \times 16}{16} - \frac{13}{16} = \frac{112}{16} - \frac{13}{16} = \frac{99}{16} = 6\frac{3}{16}.$

§. 42. **Von der Subtraction gemischter Brüche.** — a.) Sind beide Brüche, die voneinander sollen subtrahirt werden, gemischt (§. 28.); so verwandle man sie vorher in unächte reine Brüche (§. 35.). Alsdann subtrahire man nach gemeiner Art (§. 40.). b.) Ist aber nur der eine Bruch gemischt, der andere aber ein ächter reiner Bruch; so verwandle man den gemischten in einen unächten Bruch (§. 35.), und verfahre nach angezeigter Weise (§. 40.).

Exempel.

I. $4\frac{3}{5} - 3\frac{1}{5} = 1\frac{2}{5}.$

II. $6\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3} = \frac{13}{2} - \frac{14}{3}$ (§. 35.) $= \frac{39}{6} - \frac{28}{6}$ (§. 33.) $= \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}.$

III. $8\frac{6}{7} - \frac{5}{8} = 8\frac{13}{56}.$

§. 43. **Aufg. Brüche zu multipliciren.**

A Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren — Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und setze unter dieses Product den Nenner. Z. E. $5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

B Einen Bruch durch einen andern Bruch zu multipliciren — Man multiplicire den Zähler des einen Bruches mit dem Zähler des andern Bruches, ingleichen den Nenner des einen Bruches mit dem Nenner des andern. Der herauskommende Bruch ist das Product der gegebenen Brüche. Z. E. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

§. 44. Von der Multiplication gemischter Brüche — Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und setze unter dieses Product den gegebenen Nenner. Z. B. $\frac{3}{5} \times 2 = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$.

§. 45. Aufg. Brüche zu dividiren.

A Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren — Man multiplicire

die ganze Zahl in den Nenner, und lasse den Zähler unverändert: Oder man dividire, wenn es geschehen kann, den Zähler durch die ganze Zahl, und lasse den Nenner unverändert. Z. E. $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \times 3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. Nach der andern Art $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8:2}{9} = \frac{4}{9}$.

B. **Einen Bruch durch einen andern zu dividiren.** — Haben die gegebenen Brüche einerley Nenner, so dividire man bloß den Zähler des Dividendus, durch den Zähler des Divisors. Z. E. $\frac{6}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Sind aber die Brüche von verschiedener Benennung; so wende man den Divisor um; das heißt, man mache den Zähler desselben zum Nenner, und den Nenner zum Zähler, und multiplicire ihn mit dem Dividendus. Z. B. $\frac{3}{7} : \frac{5}{8}$. Man setzt also $\frac{3}{7} : \frac{8}{5}$. Hernach $\frac{3 \times 8}{7 \times 5} = \frac{24}{35}$.

§. 46. **Von der Division gemischter Brüche** — Man verwandle erstlich die gemischten Brüche in unächte reine Brüche (§. 35.), alsdann dividire man nach der

ge-

gegebenen Regel (§. 45. *B.*). Z. E. $3\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{7}{4} = \frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35}$.

III. Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubikzahlen.

§. 47. **Erkl. der Potenzen und der Wurzel.** — Das Product, welches entstehet, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, heißt eine **Potenz, dignität** auch **Potestät.** Die Potenz heißt ein **Quadrat, oder die zweyte Dignität**, wenn das Product aus zween gleichen Factoren entstehet; ein **Würfel** aber, **Cubikzahl oder die dritte Dignität**, wenn das Product aus dreyen gleichen Factoren entstanden ist, oder wenn eine Zahl erst mit sich selbst, und das Product noch einmal mit derselben Zahl multiplicirt wird. Z. B. $5 \times 5 = 25$; $4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$. Hier ist 25 das Quadrat; 64 die Cubikzahl. Die Zahl, welche mit sich selbst multipliciret wird, heißt die **Wurzel der Potenz;**

und zwar die **Quadratwurzel**, wenn aus dieser ein Quadrat; die **Cubikwurzel**, wenn aus derselben eine Cubikzahl gemacht worden ist. Im vorigen Beyspiele wäre 5 die Quadratwurzel von 25; so wie 4 die Cubikwurzel von 64.

§. 48. **Von Ausziehung der Wurzeln.** — Die Quadratwurzel aus einer Zahl ausziehen heißt diejenige Zahl suchen, die mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl hervorbringt. Die Cubikwurzel aus einer Zahl ausziehen heißt eine Zahl suchen, die dreymal mit sich multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringt.

§. 49. **Von den Quadrat- und Cubikzahlen der ersten neun Zahlen** — Bey Ausziehung der Wurzel aus zusammengesetzten Zahlen, muß man erst die Quadrat- und Cubikzahlen der ersten neun Zahlen wissen. Dazu kann folgendes Täfelchen dienen.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 50. Aufg. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Aufl. I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, deren jede aus zwoen Zifern bestehet, wovon doch die letzte zur Linken auch nur eine Zifer haben kann. So viele Klassen die Zahl enthält, so viele Theile hat auch die Wurzel.

II. Man suche in dem Täfelchen das Quadrat, das der Zahl in der ersten Klasse gleich oder nächst kleiner ist, ziehe dieß Quadrat von der Zahl ab, und setze die dazu gehörige Wurzel in die Stelle des Quotienten.

III. Neben dem Rest schreibe man die zweyte Klasse, verdopple die gefundene Wurzel,

zel, und setze die niedrigste Zifer derselben unter die höhste der neuen herabgesetzten Klasse. Man dividire mit diesem doppelten in die Zifern, die darüber stehen, und setze den Quotienten als den zweyten Theil der Wurzel an.

IV. Diesen gefundenen neuen Theil der Wurzel schreibe man gleichfalls neben dem Divisor oder dem doppelten des ersten Theils der gefundenen Wurzel. Man multiplicire den gefundenen Quotienten in den Divisor und die dabey gesetzte Zahl. Dieses Product ziehe man von den darüber stehenden Zahlen ab. Läßt es sich aber von dem, was darüber stehet, nicht abziehen, so ist der Quotient zu groß genommen worden. Man muß ihn also so lange vermindern, bis man subtrahiren kann.

V. Zu dem, was übrig bleibt, setze man die folgende Klasse. Man sehe die gefundenen Theile der Wurzel für einen an; verdopple dieselben, und verfahre mit dieser

dritten und den folgenden Klassen nach III. und IV.

Exempel.

11	66	90	56	3416
9				

```
 11 | 66 | 90 | 56 | 3416
  9 |
------
  2 66
    64
  2 56
-----------
    10 90
     6 81
------------
     4 09 56
       68 26
     4 09 56
------------
           0
```

§. 51. Aufg. Aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Aufl. I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, deren jede drey Zifern bekömmt. Die letzte Klasse zur Linken kann auch weniger Zifern enthalten.

II. Man suche in dem Täfelchen den Würfel, der den Zahlen in der ersten Klasse am nächsten kömmt; die darüber stehende Wurzelzahl ist der erste Theil der gesuchten Wurzel.

III. Man subtrahire den im Täfelchen gefundenen Würfel von den darüber stehenden Zahlen, und setze zu dem Rest die folgende Klasse.

IV. Man mache das Quadrat des gefundenen ersten Theiles der Wurzel, und multiplicire dasselbe mit 3.

V. Dieses dreyfachen Quadrats niedrigste Zifer schreibe man unter die höhste Zifer der erst herabgesetzten Klasse, und dividire damit die darüber stehenden Zahlen. Der Quotient ist der zweyte Theil der Wurzel.

VI. Mit diesem zweyten Theil der Wurzel multiplicire man das besagte dreyfache Quadrat, und schreibe das Product unter dasselbe.

VII.

VII. Man mache das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel, und multiplicire dasselbe in den vorhergehenden Theil der Wurzel, ingleichen durch 3. Des Products niedrigste Zifer setze man unter die mittlere Zahl der herabgesetzten zweyten Klasse.

VIII. Man mache den Würfel des zweyten Theiles der gefundenen Wurzel, und setze seine niedrigste Zifer unter die letzte Zifer der herabgesetzten zweyten Klasse.

IX. Die drey untereinander geschriebenen Zahlen bringe man in eine Summe, und subtrahire diese Summe von dem Rest der ersten Klasse und der dabey stehenden zweyten Klasse.

X. Wenn in dem gegebenen Cubus noch eine dritte Klasse vorhanden ist; setze man zu dem, was übrig bleibt, die dritte Klasse. Aus den gefundenen beiden ersten Theilen der Wurzel mache man das Quadrat, und multiplicire es mit 3. Die nie-

drigste Zifer davon setze man wieder unter die höhste Zifer der neuen Klasse, die übrigen schreibe man zur Linken, und verfahre hernach mit dieser dritten und den etwa folgenden Klassen, wie mit der zweyten Klasse, nach den von n. IV - IX. gegebenen Regeln.

I. Exempel.

```
1 8 5 | 1 9 3   | 5 7
1 2 5 | · · ·   |
------
  6 0   1 9 3
    7   5 · ·
  5 2   5 · ·
    7   3 5 ·
        3 4 3
-----------------
  6 0   1 9 3
-----------------
            0
```

II. Exem-

II. Exempel.

```
1 5 8 | 1 6 4 | 8 7 7 | 3 1 2 |  5 4 0 8
1 2 5 | .  .  .  |
------
  3 3 1 6 4
    7 5 . .
  3 0 0 . .
    2 4 0 .
        6 4
  ---------
  3 2 4 6 4
  ---------
        7 0 0 8 7 7
        8 4 7 8
          0
     ------------------
        7 0 0 8 7 7 3 1 2
          8 7 4 8 0 0
        6 9 9 8 4 0 0
            1 0 3 6 8 0
                  5 1 2
     ------------------
        7 0 0 8 7 7 3 1 2
     ------------------
                0
```

§. 52. Von der Probe der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel — Die gefundene Quadratwurzel mache man zum Quadrat, die Cubikwurzel zum Würfel; wenn sie dem gegebenen Quadrat

drat oder Würfel gleich sind; so ist die wahre Wurzel gefunden worden. Es ist in diesem Abschnitt die Rede nur von vollkommenen Quadrat- und Cubikzahlen; denn die unvollkommenen können nur durch Näherung gefunden werden (S. die Anfangsgründe der Arithmetik §. 110. 123. 124.).

IV. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 53. **Erklärung eines Verhältnisses.** — Die Vergleichung zwoer Zahlen von einerley Art in Ansehung ihrer Größe heißt ein **Verhältniß** (ratio). Also können zwo Ellen mit 6 Ellen, nicht aber mit 6 Stunden verglichen werden (§. 1.).

§. 54. **Eintheilung der Verhältnisse.** — Wenn man zwo Zahlen in Ansehung ihrer Größe miteinander vergleichet; so kann dieses auf zweyerley Art geschehen. Entweder untersucht man durch die Subtrac-

tion

tion, um wie viel eine Zahl größer ist als die andere; und dann heißt es ein **arithmetisches Verhältniß**, dabey die Zahl, welche anzeigt, wie viel die eine der zwo Zahlen größer sey als die andere, wie bey der Subtraction, die **Differenz** genannt wird. Deswegen man auch, um ein solches Verhältniß anzuzeigen, das Subtractionszeichen gebraucht. Z. E. 12 — 5 = 7. Oder man untersucht durch die Division, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten ist. Dieß heißt ein **geometrisches Verhältniß**. Der Quotient, welcher nämlich anzeigt, wie vielmal die eine Zahl größer als die andere ist, wird hier der **Exponent** des Verhältnisses genennet. Z. B. 12 : 4 = 3, wo 3 der Exponent ist.

§. 55. **Erklärung einer Proportion** — Eine Proportion ist die Gleichheit oder vielmehr die Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse von einerley Art. Diese Aehnlichkeit bestehet darinn, daß beide Verhältnisse einerley Differenz oder einerley Exponenten

haben

haben. Im ersten Falle sind beide Verhältnisse arithmetisch, und also eine **arithmetische Proportion**; wie z. B. 3 — 6 = 4 — 7. Im zweyten Falle sind beide Verhältnisse geometrisch, und also eine **geometrische Proportion**; wie z. B. 3 : 6 = 4 : 8. Zwischen beide Verhältnisse setzt man das Gleichheitszeichen =; wie in den beygesetzten Beyspielen geschehen ist.

§. 56. **Einige hieher gehörige Benennungen.** — Die zwo Zahlen, aus welchen ein Verhältniß bestehet, heissen die **Glieder des Verhältnisses**, wovon eines als das **vorhergehende**, das andere als das **folgende** kann angenommen werden. In einer Proportion sind also 4 Glieder derselben anzutreffen, wovon man das erste und vierte die **äußern**, das zweyte und dritte die **mittlern Glieder** der Proportion nennet.

§. 57. **Erklärung einer stettigen Proportion und der Progreßion** —

Eine

Eine **stettige Proportion** heißt diejenige, in der die mittlern Glieder gleich oder einerley Zahlen sind. Z. B. 3 — 7 = 7 — 11; oder 4 : 8 = 8 : 16. Die Zahl, welche in beiden mittlern Gliedern vorkömmt, wie hier 7 und 8 heißt die **mittlere Proportionalzahl** zwischen den beiden äußern Gliedern. — Eine **Progreßion** ist eine Reihe von Zahlen, welche in stettigen Proportionen aufeinander folgen. Wenn in derselben jedes vorhergehende Glied von dem unmittelbar darauf folgenden um einerley Zahl unterschieden ist, so heißt sie eine **arithmetische Progreßion**, wie z. B. 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. Hat aber in einer solchen Reihe Zahlen jedes vorhergehende Glied zu dem nächstfolgenden einerley Verhältniß, so heißt sie eine **geometrische Progreßion**, wie z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. Man siehet, daß in einer Progreßion die mittlere Proportionalzahl nur einmal angesetzt werde, und jede Progreßion in stetige Proportionen leicht könne aufgelöset werden.

§. 58. **Die Eigenschaften der Proportionen.** — Wir führen hier nur die zwo vornehmsten derselben an. Die Beweise davon werden in den Anfangsgründen §. 141 und 146 gegeben.

I. In einer **arithmetischen Proportion** ist die Summe der beiden äußern Glieder der Summe der beiden mittlern gleich. Z. E. in dem §. 55 angeführten Beyspiele $3 - 6 = 4 - 7$ ist $3 + 7 = 6 + 4$.

II. In einer **geometrischen Proportion** ist das Product der beiden äußern Glieder dem Product der mittlern gleich. Z. E. in dem §. cit. angeführten Beyspiele $3 : 6 = 4 : 8$ ist $3 \times 8 = 6 \times 4$.

§. 59. **Auflösung einiger Aufgaben aus der Eigenschaft einer arithmetischen Proportion.**

I. **Das vierte Glied einer arithmetischen Proportion zu finden** — Man addire das zweyte und dritte Glied,

und

und von der Summe ziehe man das erste ab. Der Rest ist das vierte gesuchte Glied der arithmetischen Proportion. Z. E. zu 3, 7, 11 wird das vierte Glied gesucht. Man mache also 7 + 11 = 18. Hernach 18 — 3 = 15, welche Zahl das gesuchte vierte Glied ist; denn es ist 3 — 7 = 11 — 15.

II. Zu zwoen gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu finden — Man addire die zwo gegebenen Zahlen, und dividire die Summe durch 2. Der Quotient ist die gesuchte mittlere arithmetische Proportionalzahl. Z. E. Es sey 3 und 11 gegeben; so mache man 3 + 11 = 14, und 14 : 2 = 7, welche die gesuchte mittlere arithmetische Proportionalzahl ist; denn es ist 3 — 7 = 7 — 15.

§. 60. **Anmerkung. Von Berechnung eines sogenannten Durchschnittes.** — Wenn mehrere Zahlen gegeben werden, und man verlangt, daß aus denselben eine arithmetische Mittelzahl oder ein soge-

nannter Durchschnitt soll gefunden werden; so addire man alle gegebene Zahlen, und dividire die Summe durch die Anzahl dieser Zahlen. Der Quotient giebt den gesuchten Durchschnitt. Z. E. Es wären die Zahlen 6, 14, 4, 24, 15, 3 gegeben, so ist $6 + 14 + 4 + 24 + 15 + 3 = 66$, und $66 : 6 = 11$, welche Zahl das arithmetische Mittel der gegebenen Zahlen, oder der Durchschnitt derselben wäre. Diese Aufgabe kann auf vorkommende Fälle nützlich angewendet werden; z. B. bey Berechnung des jährlichen Erträgnißes eines Feldes oder bey Berechnung der Zahl der an einem Orte gebohrnen oder gestorbenen Menschen gleichfalls im Durchschnitte genommen u. s. w.

§. 61. Auflösung einiger Aufgaben aus der §. 58. II. angeführten Eigenschaft einer geometrischen Proportion.

I. Das vierte Glied einer geometrischen Proportion zu finden — Man

Man multiplicire die beiden mittlern Glieder, und dividire das Product durch das erste Glied. Der Quotient giebt das gesuchte vierte Glied. Z. B. zu 3, 6, 4 wird das vierte Glied gesucht; man mache also 6 × 4 = 24, u. 24 : 3 = 8, welche Zahl das gesuchte vierte Glied ist, denn es ist 3 : 6 = 4 : 8.

II. **Zu zwoen gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden** — Man multiplicire die gegebenen Zahlen miteinander. Aus dem Product ziehe man die Quadratwurzel aus (§. 50.). Diese ist die verlangte Zahl. Z. B. Es sey 8 und 72 gegeben. So mache man 8 × 72 = 576. Davon ist die Quadratwurzel = 24; folglich die gesuchte mittlere geometrische Proportionalzahl. Denn es ist 8 : 24 = 24 : 72.

§. 62. **Von Versetzung der vier Glieder einer Proportion** — Sowohl bey einer arithmetischen als geometrischen Proportion können die 4 Glieder nach 8 verschiedenen Weisen **versetzt**; das ist, das zweyte

Glied zum ersten, das vierte zum dritten gemacht werden, ohne dadurch die Richtigkeit der Proportion aufzuheben, denn jedesmal werden demungeachtet die §. 58 angeführten Eigenschaften statt finden. Man kann es z. B. mit 1 — 2 = 3 — 4, oder mit 1 : 2 = 3 : 6 und einer jeden andern Proportion versuchen. Z. B. das erste Glied sey I, das zweyte II, das dritte III, das vierte IV, so ist vermöge der Versetzung:

I	:	II	=	III	:	IV
I	:	III	=	II	:	IV
II	:	I	=	IV	:	III
II	:	IV	=	I	:	III
III	:	I	=	IV	:	II
III	:	IV	=	I	:	II
IV	:	II	=	III	:	I
IV	:	III	=	II	:	I

§. 63. **Von andern Veränderungen einer Proportion** — Man kann die Glieder einer Proportion auf verschiedene Weise verändern, ohne daß die Größe der Proportion selbst verändert werde. Also kann

man

man I. zu beiden Gliedern eines arithmetischen Verhältnisses einerley Zahlen addiren, oder subtrahiren. Man kann II. beide Glieder eines geometrischen Verhältnisses durch einerley Zahlen multipliciren, oder dividiren. III. Kann man alle Glieder einer Proportion zu einerley Potenzen erheben. In allen diesen Fällen bleibt der vorige Werth der gegebenen Proportion.

§. 64. **Von der Regel de Tri überhaupt.** — Schon vorher §. 61. I. haben wir gezeigt, wie aus dreyen gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte könne gefunden werden. Diese Vorschrift heißt man die **Regel de Tri**, deren Gebrauch auch im gemeinen Leben von ungemein großem Nutzen ist. Bey Anwendung derselben hat man darauf zu sehen, daß die drey gegebenen Zahlen nebst der unbekannten in eine solche Ordnung gesetzt werden, daß das unbekannte Glied darinn das vierte werde. Ist aber die vorgelegte Aufgabe so beschaffen, daß das unbekannte Glied nicht als das vier-

te angesetzt werden könne; so kann man es durch die Versetzung (§. 64.) an die gehörige Stelle bringen. Man multiplicire alsdann die mittleren beiden Glieder, und dividire das Product durch das erste Glied; so ist der Quotient das gesuchte vierte Glied. Z. B. $3 : 12 = 8 : IV = \frac{12 \times 8}{3} = \frac{96}{3} = 32.$

§. 65. **Von der Eintheilung der Regel de Tri.** — Die Regel de Tri theilet man ein in die einfache und zusammengesetzte. Die **einfache** oder **eigentliche** Regel de Tri bestehet aus einer einzigen Proportion, wovon die drey Glieder gegeben, und das vierte hievon nach §. 61. I muß gefunden werden. Bey der **zusammengesetzten** Regel de Tri kommen mehrere Glieder aus verschiedenen Proportionen vor, wozu ein oder mehrere unbekannte Glieder sollen gesucht werden. Zu der letztern gehören die Regula Quinque, Septem u. s. w. die wir gleich unten erklären, und deren Gebrauch zeigen werden.

§. 66. **Von der geraden und verkehr-**

kehrten Regel de Tri. = In gewissen Aufgaben behalten die ähnlich liegenden Glieder nicht die nämliche Ordnung; das heißt, zwo Größen haben in Ansehung der zwoen andern ein verkehrtes Verhältniß. Z. B. 10 Menschen verrichten eine Arbeit in 6 Tagen. Man fragt, wie viele Arbeiter vollenden diese Arbeit in 3 Tagen. Hier kann ich nicht die Proportion 6 T : 3 T = 10 A : IV ansetzen, denn das IV Glied muß größer als das dritte homogene oder ähnlichliegende werden, weil man, eben dieselbige Arbeit in 3 Tagen zu vollbringen, mehr als 10 Arbeiter nöthig hat. Es müssen also auch die Glieder des ersten Verhältnisses mit den Größen des zweyten Verhältnisses einerley Ordnung haben; das heißt, es muß gleichfalls in diesem Falle das kleinere Glied 3 T voraus und dann erst das größere 6 T gesetzt werden; nämlich 3 T: 6 T = 10 A : IV. Aufgaben von dieser Art heißt man Aufgaben der **verkehrten** oder **umgekehrten** Regel de Tri. Alle übrige, in denen die drey gegebenen Glieder in der gehörigen Ordnung ohne Versetzung richtig

aufeinander folgen, rechnet man zu der **geraden Regel de Tri.**

§. 67. **Von der welschen Praktik.** — Es giebt verschiedene Vortheile, die sich in der Regel de Tri anwenden lassen. Sie werden unter der Benennung der **welschen Praktik** begriffen. Wir wollen die vornehmsten derselben hier anführen.

I. Wenn bey genannten Zahlen die Glieder der Verhältnisse aus verschiedenen Einheiten bestehen; so verwandle man dieselben in die kleinsten Einheiten von einerley Benennung.

Z. E. 1 Elle kostet 6 Gulden, 4 Groschen; was kosten 4 Ellen? Nun sind 6 fl. 4. Gr. = 124 Gr. diese also mit 4 multiplicirt, oder $124 \times 4 = 496$, und sie zu Gulden reducirt, oder $\frac{496}{20} =$ 24 fl. 16 Gr. = dem vierten unbekannten Gliede, weil 1 nicht dividirt.

Wenn man dieses Beyspiel ordentlich ansetzet; so wäre:

1 Elle : 4 Ellen = 6 fl. 4 gr: IV = 24 fl. 16 gr.

```
              20
             ———
             124
               4
            ————
     20 | 496 | 24 16/20
        | 40  |
         ————
         — 96
           80
          ———
           16
```

II. Wenn die Glieder der Verhältnisse aus gemischten Brüchen (§. 28.) bestehen; so muß man sie einrichten (§. 35.). Beyspiele hiezu kommen unten (§. 68. V u. VI.) vor.

III. Wenn das unbekannte Glied unter einer anderen Benennung, als es vermöge der Aufgabe bekommen hat, gefunden wird; so bringe man solches zu der Benennung, welche das ähnliche Glied in der vorgelegten Aufgabe überkommen hat.

Z. E. 20 Pfund kosten 6 Ducaten, wie viel kosten 3 Centner? Nun sind 3 Ct. = 300 Pf. Es wird also 20 Pf: 300 Pf. = 6 Duc: IV = $\frac{300 \times 6}{20}$ = $\frac{180}{2}$ = 90 Duc.

§. 68. **Noch andere Vortheile bey Anwendung der Regel de Tri** — Ein jeder, der die vorausgeschickten Lehren wohl innen hat, und sich fleißig in Anwendung derselben übt, dem werden sich dergleichen Vortheile zur Abkürzung mühsamer Berechnungen von selbst anbieten. Wir wollen hievon, den Anfängern zur Erleichterung, einige Beyspiele geben.

I. Wenn das erste oder dritte Glied = 1, oder keine allzugroße Zahl ist; so kann man die §. 67. I. erwehnte Reduction ersparen. Ueberdas weil 1 weder multipliciret, noch dividirt; so wird die Rechnung in solchen Aufgaben, die man auch Multiplications- und Divisions-Exempel nennet, von selbst abgekürzet.

Z. B. 1 Pfund kostet 3 fl. 8. Gr. 6 Pf. was kosten 5 Pfund. Man multipliciret sogleich das zweyte Glied mit 5, so wird das vierte Glied = 17 fl. 2 Gr. 6 Pf.

II. Wenn das erste und zweyte Glied, oder das erste und dritte Glied sich durch die nämliche Zahl dividiren lassen; so braucht man statt dieser Glieder die Quotienten (§. 63. II.).

Z. E. 18 Pf. kosten 30 fl., was kosten 33 Pf. Hier könnte man die beiden ersten Glieder mit 6 dividiren. Es wäre also 3 : 5 = 33 : IV. In dieser Proportion könnte man das dritte Glied zum zweyten machen oder 3 : 33 = 5 : IV (§. 62.), wo man wiederum das erste und zweyte Glied durch 3 dividiren könnte. Es würde also 1 : 11 = 5 : IV = 11 × 5 = 55 fl.

III. Wenn die Zahlen, die gleiche Namen haben, um 1 unterschieden sind; so darf man nur den Werth von 1 suchen, und diesen zu der andern genannten Zahl addiren.

Z. E.

Z. E. 5 Pfund kosten 40 fl. was kosten 6 Pfund. Nun ist der Preiß von 5 Pfunden bekannt; man darf also nur noch den Preiß von 1 Pfund berechnen, den man zu den 5 Pfunden hinzu addiren müßte, um den Preiß von 6 Pf. zu erhalten. Es wäre also $5 : 40 = 1 : IV = \frac{40}{5} = 8$. Diese $8 + 40 = 48$. Hiemit $5 : 40 = 6 : 48$.

IV. Wenn im gefundenen vierten Gliede ein gemischter Bruch vorkömmt; so kann man denselben durch Ansetzung einer neuen Proportion zur kleinern Einheit reduciren: oder man multiplicire den Zähler eines solchen Bruchs mit allen Theilen, die zusammengenommen das Ganze ausmachen, und von denen man sucht, wie viel auf den Bruch gehen. Man dividire das Product mit dem Nenner. Der Quotient giebt den verlangten Ausdruck in kleinern Einheiten.

Z. E. In der Aufgabe: wenn 3 Pfund 7 fl. kosten, was kosten 50 Pfund? wäre $IV = 116\frac{2}{3}$ fl. Wollte man nun wissen, wie

viel

viel $\frac{2}{3}$ fl. an Groschen ausmachte; so weis man, daß 1 fl. = 20 Gr. Es wäre also die Proportion anzusetzen $3:2 = 20:IV = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ Gr. Man kann nämlich schließen, wenn der Gulden in 3 Theile getheilt wird, so sollen 2 derselben genommen werden, das der Bruch $\frac{2}{3}$ anzeigt (§. 27.); wie viel dieser Theile müssen genommen werden, wenn dieser Gulden in 20 Theile getheilet wird. Wenn man nicht wüßte, wie viel Pfenninge $\frac{1}{3}$ Gr. beträgt; so könnte es durch diese Proportion gefunden werden $3:1 = 12:IV = \frac{12}{3} = 4$.

V. Wenn das erste Glied 1 hat, im zweyten aber, oder im dritten Gliede sich ein gemischter Bruch befindet; so muß man einen solchen Bruch nach dem gesagten (§. 67. II.) einrichten, den Nenner aber des eingerichteten Bruchs unter das erste Glied oder unter 1 setzen, und also mit demselben das Product der mittleren Glieder dividiren.

Z. E. 1 Elle kostet 6 Gulden, was ko-

sten $4\frac{2}{3}$ Ellen. Nun ist $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ (§. 35.). Man multiplicire also 6 mit 14, und dividire das Product durch 3. Es wäre also $IV = \frac{84}{3} = 28$. Ordentlich wäre dieses Beyspiel so aufzusetzen:

$$1 \text{ Elle} : 4\tfrac{2}{3} \text{ Ellen} = 6 \text{ fl.} : IV$$

```
3            14
          ------
     3  | 84 | 28
          6
         ----
          24
          24
         ----
          0
```

VI. Wenn im ersten Glied ein Bruch, das zweyte aber, oder mittlere Glied = 1 ist; so richte man den Bruch ein, und multiplicire mit dem Nenner das dritte Glied. Sind aber das erste und dritte Glied gebrochene Zahlen; so multiplicire man mit dem Nenner des ersten Gliedes das dritte, und mit dem Nenner des dritten das erste Glied.

Z. E. $2\frac{3}{16}$ Pfund kosten 1 fl. was kosten 7 Pfund? Es ist $2\frac{3}{16} = \frac{35}{16}$. Es wird

also

also nach der gegebenen Regel für den ersten Fall $\frac{7 \times 16}{35} = \frac{112}{35} = 3\frac{7}{35}$ fl. $= 3\frac{1}{5}$ fl. $= 3$ fl. 12 kr. Für den zweyten Fall sey folgendes Exempel: $5\frac{3}{8}$ Ellen kosten 1 fl. was kosten $2\frac{3}{4}$ Ellen. Statt 1 fl. kann man 60 kr. setzen. Da also $5\frac{3}{8} = \frac{43}{8}$ und $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, so wird $43 \times 4 = 172$ und $11 \times 8 = 88$. Es ist also das vierte Glied oder IV $= \frac{88 \times 60}{172} = \frac{5280}{172} = 30\frac{120}{172} = 30\frac{30}{43}$ kr. $= 30$ kr. $5\frac{25}{43}$ hl. Man hat statt 1 fl. in diesem Beyspiele 60 kr. angesetzt, weil sonst das erste Glied oder der Dividens größer als das Product der mittlern Glieder oder der Dividendus gewesen wären. Wir wollen beide Exempel ordentlich ansetzen, damit Anfänger auch ohne weitere Anleitung die Art der Berechnung einsehen lernen.

Erstes Exempel.

$2\frac{3}{16}$ Pf. : 1 fl. $= 7$ Pf. : IV

$$
\begin{array}{lcl}
35 & 16 & \\
\hline
35 & | \; 112 \; | & 3\frac{7}{35} \\
 & 105 & \\
\hline
 & 7 &
\end{array}
$$

Zweytes Exempel.

$4\frac{3}{8}$ Ellen : 1 fl. = $2\frac{3}{4}$ Ellen : IV
oder $\frac{43}{8}$ Ellen : 60 kr. = $\frac{11}{4}$ Ellen : IV

```
 43              11
  4               8
----            ----
172              88
                 60
             ---------
      172 | 5280 | 30 120/172
            516
            ---------
             120
```

VII. Wenn das dritte Glied = 1, das zweyte aber aus einem Bruch bestehet; so multiplicire man mit dem Nenner desselben das erste Glied. Ist aber das erste Glied ein Bruch; so multiplicire man mit dessen Nenner das zweyte Glied. Haben das erste und zweyte Glied Brüche; so multiplicire man mit dem Nenner des ersten das zweyte, und mit dem Nenner des zweyten das erste Glied. Die nachstehenden Exempel sind auf die erwehnten drey Fälle eingerichtet.

Erstes Exempel.

3 Loth : $2\frac{4}{5}$ fl. = 1 Loth : IV

```
 5         14
--         60
15      ---------
   15 | 840 | 56 Kr.
         75
      ---------
       — 90
         90
      ---------
          0
```

Zweytes Exempel.

$\frac{5}{6}$ Pf: 1 fl. 45 kr. = 1 Pf. : IV

```
        60          6
     ----------
       105 kr.
         6
     ----------
5 | 630 | 126 kr. = 2 fl. 6 kr.
     5
    ---
    13
    10
    ---
     30
     30
    ---
     0
```

Drittes Exempel.

$3\frac{1}{2}$ Ct. : $16\frac{1}{4}$ fl. = 1 Ct. : IV

oder $\frac{7}{2}$ Ct. : $\frac{65}{4}$ fl. = 1 Ct.

```
 7        65
 4         2
---    ---------
28     | 130 | 4 18/28 = 4 9/14 fl.
       | 112 |
       ---------
          18
```

Anmerk. Die zur Aufhebung der Brüche von V — VIII erwehnten Vortheile gründen sich auf den §. 63. II. angeführten Grundsatz, daß nämlich die Größe einer Proportion nicht verändert werde, wenn man beide Glieder eines geometrischen Verhältnisses durch einerley Zahlen multiplicirt. In der Kettenregel wird dieser Satz ungemein vortheilhaft angewendet werden.

§. 69. **Exempel der einfachen geraden Regel de Tri.** — Anfängern einen Stoff zur fleißigen Uebung zu liefern, will ich einige Beyspiele hieher setzen.

I. 1 Cent-

I. 1 Centner kostet 7 Gulden, was kosten 9 Centner?

II. 1 Pfund kostet 4 fl. 16 Gr. was kosten 14 Pfund?

III. 1 Loth kostet 6 Gr. 2 Kr. 3 Pfen. was kosten 3 Pfund?

IV. 15 Kr. 2 Pfen. kostet ein Quintchen, was kosten $5\frac{2}{3}$ Quintchen?

V. 1 Maaß kostet 2 Groschen $2\frac{3}{4}$ Kr. was kosten 4 Eymer $39\frac{1}{2}$ Maaß?

VI. 2 Kr. $3\frac{1}{2}$ Pfen. kostet ein Quärtchen, was kosten $9\frac{2}{3}$ Maaß?

VII. Für 1 baierischen Thaler bekömmt man 6 Kopfstücke (§. 11.), wie viel derselben bekömmt man für $98\frac{1}{2}$ baierische Thaler?

VIII. 25 Zwölfer 6 Kreutzer gelten einen Ducaten, wie viel Gulden und Kreutzer bekömmt man für 128 kaiserl. Ducaten?

IX. 1 Fuder kostet 344 Fl. 18. Gr. was kosten $9\frac{1}{2}$ Eymer?

X. 1 Scheffel Getraids kostet 7 Fl. 6 Gr. 2 Kr. was kosten 6 Metzen, $2\frac{3}{4}$ Viertel desselben?

XI. 6 Schuhe mißt 1 Klafter, wie viel Schuhe, Zolle und Linien messen $15\frac{1}{3}$ Klafter?

XII. In einem Tage verzehrt eine Familie 6 Fl. $18\frac{1}{3}$ Gr. Wie viel verzehrt sie in 3 Monathen und 2 Wochen?

XIII. Ein Arbeiter bekömmt zum Tagslohn 4 Gr. $2\frac{1}{2}$ Kr. wie viel bekömmt er nach dreyen Wochen?

XIV. 4 Fl. $6\frac{1}{7}$ Gr. kosten 3 Ellen, wie viel kosten $32\frac{2}{3}$ Ellen?

XV. 15 Fl. $4\frac{5}{7}$ Gr. $3\frac{1}{2}$ Kr. bezahlt man für 4 Klafter, wie viel kosten $9\frac{2}{3}$ Klafter?

XVI. 6 Centner $8\frac{1}{3}$ Pf. kosten 42 baierische Thaler $3\frac{1}{4}$ Kopfstücke. Wie viel Kopfstü-

stücke, und dann wie viel Gulden und Kreuzer kosten $24\frac{1}{8}$ Centen?

XVII. 9 Scheffel, 3 Metzen $3\frac{1}{3}$ Viertel kosten 67 Fl. $36\frac{1}{7}$ Groschen, was kosten 4 Metzen $2\frac{3}{4}$ Viertel?

XVIII. $\frac{2}{3}$ Pfund kosten $\frac{1}{7}$ Gulden, was kosten $\frac{3}{5}$ Pfund?

XIX. 9 Arbeitern bezahlt man des Tages $2\frac{2}{3}$ Fl. wie viel beträgt der Taglohn von 28 Arbeitern?

XX. 250 Fl. geben jährlich $12\frac{1}{3}$ Gulden, wie viel Interesse geben 6457 Gulden?

XXI. Man muß für Gold gegen Courentgeld $3\frac{2}{3}$ Fl. pro Cent Agio bezahlen, wie viel Aufgeld erhält man auf $354\frac{1}{2}$ baierische Ducaten?

XXII. In $\frac{3}{4}$ Jahren bezahlt eine Person $50\frac{1}{6}$ baierische Thaler, wie viel muß sie in $3\frac{1}{4}$ Jahren bezahlen?

Anmerk. Mehr dergleichen Beyspiele kann ein jeder sich selbst zur Uebung vorlegen. Man wähle aber gemeinnützige, und bestimme die Einheiten genannter Zahlen nach dem Werth, den sie bey uns haben (§. 11.). Gleichfalls hat man darauf zu sehen, daß man die Regel de Tri nicht in Fällen anzuwenden suche, wo sie nicht statt finden kann (S. in den Anfangsgründen der Arithm. §. 156.).

§. 70. **Exempel der einfachen verkehrten Regel de Tri.** — Was für Aufgaben zur verkehrten Regel de Tri gehören, und wie sie müssen angesetzt und berechnet werden, sagten wir vorhin §. 66. Wir wollen ins besondere einige Beyspiele derselben hersetzen.

I. 12 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 6 Tagen, wie viel Arbeiter hat man nöthig, diese Arbeit in 4 Tagen zu vollenden?

II. Zu einem Kleide braucht man 5 Ellen $\frac{9}{4}$ breites Tuch. Wie viel Ellen Zeugs hat man zum Futer nöthig, der nur $\frac{3}{4}$ breit ist?

III. 4 Schuhmachersgesellen verfertigen in einem Tage 6 paar Schuhe. Wie viel derselben müssen arbeiten, in einem Tage 30 paar zu verfertigen?

IV. Ein Capital von 100 Fl. giebt 5. Fl. jährliche Zinsen. Wie groß muß das Capital seyn, das jährlich 700 Fl. Interesse geben soll?

V. Man will sich ein Sommerkleid von einem $\frac{2}{3}$ breiten Zeug beyschaffen. Wie viel desselben muß man dazu haben, wenn man zu einem Winterkleide 5 Ellen Tuchs gebrauchte, wovon die Elle $\frac{10}{4}$ breit wär?

VI. 6 Pflüge pflügen einen Acker in 7 Tagen, wie viel Pflüge braucht man, diesen Acker in 9 Tagen zu pflügen?

VII. Zu einem Kleide fordert man $6\frac{1}{2}$ Ellen Tuchs, wenn selbes $1\frac{3}{4}$ Ellen breit ist. Wie viel werden erfordert, wenn das Tuch nur $1\frac{1}{3}$ Ellen breit ist?

VIII. Wenn das Scheffel Korn 5 Fl. 6 Gr. gilt, so muß ein Groschenlaib 1 Pf. 3 Loth wiegen, wie schwer muß er seyn, wenn das Scheffel Korn nur 4 Fl. 7 Gr. gilt?

IX. Wenn in einer Mühle von 4 Gängen in 3 Wochen 18 Scheffel Getraid können gemahlen werden, wie viel Gänge muß man nehmen, dieß Getraid in einer Woche oder 7 Tagen zu mahlen?

§. 71. **Von der Regel von fünfen** (Regula de quinque) — diese gehört zu der zusammengesetzten Regel de Tri (§. 65.), und wird in den Aufgaben angewendet, in welchen 5 Glieder gegeben, und dazu das sechste muß gefunden werden (S. **Anfangsg. der Algebra** §. 55.). Es giebt verschiedene Methoden, solche Aufgaben aufzulösen. Wir wollen von denselben die zwo kürzesten anführen.

Erste Auflösungsart. Man multiplicire von den fünf gegebenen Gliedern zwey Glieder, welche einerley Benennung haben, mit

mit zweyen andern, die auch einerley Benennung haben. Diese beyden Producte setze man mit den übrigen gegebenen Gliedern in eine Proportion, und suche nach der gewöhnlichen Art (§. 64.) das vierte Glied.

Exempel. 2 Holzhauer schlagen in einem Tage 3 Klafter Holz, wie viel hauen ihrer 20 in 6 Tagen.

2 Holzhauer	20 Holzhauer
1 Tag	6 Tag
2 :	120 = 3 Klafter : IV
	3
	2 | 360 | 180 Klafter.

Zweyte Auflösungsart. Man setze die gegebenen Glieder in zwo Reihen übereinander, daß beiderseits einerley Namen zu stehen kommen. Es läßt sich dieses am besten dadurch bewerkstelligen, wenn man mit dem unbekannten Gliede anfängt. Es sind also die Producte auf beiden Seiten gleich, und man findet das unbekannte Glied, wenn man beiderseits mit denjenigen Zahlen dividiret,

die mit dem unbekannten Gliede multipliciret sind.

Anmerk. Bey der zweyten Auflösungsart, die nicht allein für diese, sondern eine jede Art der Regel de Tri sehr zu empfehlen ist, kann man gleichfalls **verschiedene Vortheile** anwenden. 1.) Wenn sich zwo Zahlen durch eine dritte auf beiden Seiten dividiren lassen, so kann man die Multiplication der Zahlen auf beiden Reihen sehr verkürzen. 2.) Wenn in diesen Aufgaben reine Brüche vorkommen, so werden die Nenner ausgestrichen, und wechselweise auf die entgegen gesetzte Seite als ganze Zahlen, womit man multipliciren muß, gebracht. Sind sie aber gemischte Brüche, so richte man sie vorher ein, und verfahre mit denselben wie vorher. 3.) Wenn auf einer Seite 1 vorkommen, so kann man sie ausstreichen, weil sie weder multipliciren noch dividiren. — Diese Vortheile, welche mit den vornehmsten der §. 68 angeführten einerley sind, beruhen auf eben denselben Grundsätzen (§. 63.).

Exem-

Exempel. 7000 Fl. geben in 12 Jahren 4000 Fl. Interesse, was geben 13000 in 9 Jahren?

7000 Fl.	4000 Fl. Inter.
12 Jahre	13000 Fl.
x Inter.	9 Jahre

$$7000 \times 12 \times x = 4000 \times 13000 \times 9$$

$$x = \frac{4000 \times 13000 \times 9}{7000 \times 12}$$

Man kann in diesem Exempel gleich einen der eben erwehnten Vortheile anwenden, und beiderseits mit 1000, hernach mit 4, und endlich mit 3 dividiren, wie hier zu sehen ist.

$7\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	$\cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$
$3 \quad \cancel{12}$	$13\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$
x	$\cancel{9} \quad 3$

$$7\,x = 13000 \times 3$$

Beiderseits mit 7 dividirt

$$x = \frac{13000 \times 3}{7} = 5571\tfrac{1}{7} \text{ Fl.}$$

Um

Um auch zu zeigen, wie leicht Brüche nach dieser Berechnungsart aufgehoben werden, wollen wir noch ein Beyspiel hersetzen.

Exempel Auf 1 Meile bezahlt man für 1 Pferd $\frac{1}{2}$ Fl. wie viel muß für 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden?

2	1 Pferd	$\frac{1}{2}$ Fl.
	1 Meile	28 Pferde 14 7
2	x Fl.	$4\frac{1}{2}$ Meile odre $\frac{9}{2}$ Meilen.

$$x = 7 \times 9 = 69 \text{ Fl.}$$

Anmerk. Man kann auch **probiren**, ob man recht gerechnet habe, wenn man die Aufgabe umkehrt. Denn im vorigen Beyspiele könnte man fragen: da 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile 63 Fl. kosten, was muß man für ein Pferd auf eine Meile bezahlen, und da muß $\frac{1}{2}$ Fl. wieder heraus kommen.

28 Pf.	63 Fl.
$\frac{9}{2}$ $4\frac{1}{2}$ Meile	1 Pferd 2
x	1 M.

$$9 \times 28 \times x = 63 \times 2$$
$$28 \times x = 7 \times 2$$
$$4x = 2$$
$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ Fl.}$$

§. 72. Exempel der geraden Regel von Fünfen.

I. Für 40 Centner, wenn sie 36 Meilen weit geführt werden, bezahlt man 50 Fl. Wie viel bezahlt man für 9 Centner, wenn sie 12 Meilen sollen geführt werden?

II. Ein Capital von 2550 Fl. giebt in einem Jahre 162 Fl. Interesse, wie viel würde dasselbe in $1\frac{1}{4}$ Jahren Zinsen geben, wenn zu demselben noch 650 Fl. sollten geleget werden.

III. 7 Ellen Tuchs, welches $1\frac{2}{3}$ breit ist, kosten 28 Fl. 19 Gr. Wie viel kostet ein Stück Tuchs, das 36 Ellen hält, von gleicher Güte, aber $2\frac{1}{4}$ Ellen breit ist?

IV. Ein Vater bezahlt für seinen Sohn alle 2 Wochen 4 Fl. 6 Gr. Kostgeld. Wie viel muß ein andrer Vater für seine 3 Söhne bey gleicher Lebensart durch ein ganzes Jahr bezahlen?

V. In einem viereckten Saale, der 50 Schuh lang und 32 $\frac{1}{4}$ breit ist, kann man 293 Bodensteine legen. Wie viel derselben faßt der Boden eines Zimmers, das nur 14 Schuhe lang und 9 $\frac{1}{2}$ Schuh breit ist?

VI. Ein Baumeister hält durch 6 Wochen 46 Arbeiter, denen er durch diese Zeit 267 Fl. bezahlte. Nachgehends behält er von diesem nur mehr 16, wie viel beträgt die Bezahlung derselben auf 4 Wochen?

§. 73 Exempel der umgekehrten Regel von fünfen.

I. 125 Soldaten machen eine Schanze in 6 Monathen, wie viel Soldaten werden erfodert, um diese Schanze in 2 Monathen zu Stande zu bringen?

II. Ein Capital, das auf 4 Procent in einen Banco gelegt worden, giebt alle Monathe 106 Fl. Zinsen. Wie groß ist das Kapital?

III. Wenn 8 Ellen $\frac{9}{4}$ breites Tuch zu zweyen Kleidern gebraucht werden, wie viel braucht man zu einem Kleid, wenn das Tuch nur $1\frac{2}{3}$ breit ist?

IV. Ein Sechserlaib oder 2 Groschen Brod wiegt $4\frac{1}{9}$ Pfund, wenn das Scheffel Korn 5 Fl. 15 Gr. kostet. Wie viel muß ein Groschenbrod wiegen, wenn das Scheffel Korn nur 3 Fl. 3 Gr. kostet?

§. 74. Von der Regula de septem, novem — Wenn in einer verhältnißmäßigen Aufgabe noch mehr als fünf Glieder z. B. 7 oder 9 vorkommen, so nennt man sie die regulam septem oder nouem. Man kann sie auf eben dieselbe Art, wie die Regel von fünfen, behandeln.

Exempel. 25 Schreiber, von denen jeder in einem Tage 9 Stunden schreibt, schrei-

ben in 8 Tagen 36 Bücher Papier; wenn man nun 15 Schreiber anstellt, deren jeder in einem Tage 8 Stunden schreibt, in wie viel Tagen schreiben dieselben 28 $\frac{4}{5}$ Buch Papier voll?

5	25 Schreiber	36 Buch Pap.	5
	1 Tag	15 Schreiber	3
	9 Stunden	1 Tag	
	8 Tage	8 Stunden	
4	$\frac{144}{5}$ 28 $\frac{4}{5}$ Buch P.	x Tage.	

§. 75. **Erklärung und Auflösung der Gesellschaftsrechnung und der Vermischungsregel** —. Die gemeine Gesellschaftsrechnung ist eine Anwendung der Regel de Tri. In den Aufgaben, die bey derselben vorkommen, soll ein Gewinnst oder Verlurst unter mehrere getheilt werden, doch so, daß auf das Verhältniß dessen, was sie zusammengelegt haben, Rücksicht genommen werde. Hieher gehört auch die **Vermischungsregel**, wenn man nämlich aus den gegebenen Verhält-

hältnissen einzelner Materien finden soll, wie viel von jeder zu einer gegebenen vermischten Menge soll genommen werden. Die Auflösungsmethode ist sehr einfach. Man addire die zusammen gelegten Gelder oder andere Sachen in eine Summe. Man schließe nun insbesondere: wie sich diese ganze Summe zu der Einlage des ersten verhält, so verhält sich der ganze Gewinnst zum Gewinnst des ersten. Auf diese Art findet man auch den Gewinust des zweyten, dritten u. s. w. Wenn bey einer Aufgabe verschiedene Zeiten bestimmt werden, so müssen sie vorher mit dem Eingelegten, darauf sie sich beziehen, multiplicirt werden. Dergleichen Aufgaben heißt man Exempel der **gedoppelten** Gesellschaftsrechnung. Zur **Probe** dieser Rechnung addire man die gefundene Zahlen, oder einzelne Gewinnste oder Verluste eines jeden in eine Summe. Diese muß dem ganzen gegebenen Gewinnste oder Verluste gleich seyn. Bey den Aufgaben der Vermischungsrechnung braucht man die nämliche Auflösungsart, und

man hat dabey die Gewichte oder Werthe der einzelnen Materien, die zu vermischen sind, als etwas eingelegtes, die Größe aber des vermischten als einen Gewinnst oder Verlust zu betrachten.

Exempel.

I. Drey Kaufleute haben ein Kapital von 2600 Fl. zusammengelegt; und zwar der erste hat 1000 Fl., der andre 700 Fl. der dritte 900 Fl. gegeben, mit diesen 26000 Fl. sind 15000 Fl. gewonnen worden. Man fragt, was eines jeden sein Antheil am Gewinnste sey?

$$2600 : 1500 = 1000 : \frac{15 \times 1000}{26} = 576\tfrac{12}{13}$$

$$2600 : 1500 = 700 : \frac{1500 \times 7}{26} = 403\tfrac{11}{13}$$

$$2600 : 1500 = 900 : \frac{1500 \times 9}{26} = 519\tfrac{3}{13}$$

II. Zu gutem Schießpulver nimmt man 1 Pf. Salpeter, 6 Loth Kohlen, und 4 Loth Schwefel. Wie viel muß man von jeder Materie nehmen, daraus einen Centner oder 100 Pf. Pulver zu verfertigen? — Die Rechnung etwas kürzer zu machen, kann man alle 3

Zah-

Zahlen durch 2 dividiren, und also von jeder Hälfte nehmen.

16 Loth Salpeter
3 Loth Kohlen
2 Loth Schwefel

21 Loth Pulver.

Nun schließe man: zu 21 Loth Pulver müssen 16 Loth Salpeter genommen werden, wie viel braucht man zu 100 Pf. oder 3200 Loth, und so mit jedem.

$21 : 16 = 3200 : \frac{3200 \times 16}{21} = 2438 \frac{2}{21}$ Loth $= 76$ Pf. $6 \frac{2}{21}$ L.

$21 : 3 = 3200 : \frac{3200 \times 3}{21} = 457 \frac{3}{21}$ Loth $= 14$ Pf. $9 \frac{3}{21}$ L.

$21 : 2 = 3200 : \frac{3200 \times 2}{21} = 304 \frac{16}{21}$ Loth $= 9$ Pf. $16 \frac{16}{21}$ L.

§. 76. Exempel von der Gesellschaftsrechnung und Vermischungsregel aus Reccards Lehrbuch.

I. Es pachten 4 Fleischer eine Wiese für 62 Reichsthaler, und weiden darauf ihre Schaa-

se: der eine hat 60 Stücke, der andere 46, der dritte 30, der vierte 24. Wie viel muß ein jeder zu dem Pachtgelde geben?

II. Es starb ein Schuldner, dem 5 Creditoren Geld geliehen haben, nämlich der erste 2000 Fl. der andere 1460 Fl. der dritte 520 Fl. der fünfte 70 Fl. Er hinterließ aber nur 2154 Fl. Wie viel wird ein jeder Creditor von seinem Gelde wieder bekommen?

III. Es kaufen 3 Gärtner 5 Schock junge Bäume, welche alle von gleicher Güte sind. Der eine hat dazu 50 Fl. der andere 25 Fl. der dritte 10 Fl. gegeben. Wie viel Bäume wird ein jeder bekommen?

IV. Drey Kaufleute legen eine gewisse Summe zusammen. Der erste giebt 800 Fl. auf 4 Monathe, der andere 600 Fl. auf 6 Monathe, der dritte 200 Fl. auf 3 Monathe. Sie gewinnen dadurch 150 Fl. Wie viel bekömmt ein jeder von dem Gewinn?

V. Drey Fleischer pachten eine Wiese

für 60 Fl. und weiden darauf ihre Schaafe. Der eine hat 50, der andere 30, der dritte 20 Stück. Der erste läßt sie 4, der andere 6, der dritte 3 Wochen lang darauf gehen. Wie viel muß ein jeder zu dem Pachtgelde geben?

VI. Man soll 14 löthiges und 9löthiges Silber so vermischen, daß man 10 Mark 12 löthiges bekomme. Wie viel muß von jeder Gattung genommen werden? Man muß 12 erst von 14, ingleichen 9 von 12 subtrahiren. Die Differenzen sind 2 und 3. die Summe derselben 5. Es wird alsdann geschlossen: wie die Summe der Differenzen 5 zu der ersten Differenz 2, also 10 Mark zu 4 Mark 9 löthigen Silber. Ferner, wie diese Summe 5 zu der andern Differenz 3, also 10 Mark zu 6 Mark 14 löthigen Silber.

§. 77. Von der Falsirechnung. —

Bey der Falsirechnung müssen die unbekannten Glieder der Proportionen nach gegebenen Verhältnissen erst willkührlich angenommen wer-

werden, ehe ihre wahren Größen gefunden werden können. Die Aufgaben, welche hieher gehören, können auf eben die Weise, wie die Exempel der Gesellschaftsregel gerechnet werden; wenn man nur statt der unbekannten Größen Zahlen setzet, die gegeneinander im gegebenen Verhältnisse stehen. Ich will mehrmal aus Reccard einige Beyspiele hersetzen.

I. Ein Gewinn von 200 Reichsthaler soll unter drey Kaufleute getheilet werden, davon der eine zu der Summe, aus welcher der Gewinnst entstanden, so viel als die beiden andern zusammen, der andere aber noch einmal so viel als der dritte gegeben. Wie viel wird ein jeder bekommen? Hier werden zuerst drey willkührliche Zahlen angenommen; welche die gegebenen Verhältnisse des Eingelegten gegeneinander haben, davon nämlich die erste so groß ist als die beiden andern zusammengenommen, und die noch einmal so groß ist als die dritte. Z. B. 3, 2, 1, oder 6, 4, 2, oder 30, 20, 10. Diese Zahlen zeigen die Verhältnisse an, nach welchen der Gewinn

getheilet werden muß. Denn die erste ist so groß, als die beiden andern zusammen, die andere aber noch einmal so groß als die dritte; folglich kann man dieselben eben so gut, als ob man wüßte, wie viel ein jeder wirklich eingelegt hat, brauchen, um die gehörigen Theile des Gewinnes nach den obigen Regeln zu finden. Die Rechnung selbst ist folgende.

Angenommene Einlage des ersten	3
des andern	2
des dritten	1
Summe	6

6 : 3 = 200 : 100 Reichsth. Gewinn des ersten.
6 : 2 = 200 : 66⅔ Reichsth Gewinn des andern
6 : 1 = 200 : 33⅓ Reichsth. Gewinn des dritten

II. Es soll eine Belohnung von 500 Reichsthaler unter 4 Personen ausgetheilet werden, davon soll der erste dreymal so viel als die drey andern zusammen, der andere doppelt so viel als die beiden letzten, von diesen aber jeder gleich viel bekommen. Wie

viel

viel bekömmt ein jeder? Hier können folgende Zahlen angenommen werden 18, 4, 1, 1. Die Summe ist 24, die übrige Rechnung wie die vorhergehende.

III. Es soll eine Zahl gefunden werden, die zu ihrer Hälfte, Drittheil und Viertheil addiret 60 zur Summe giebt. Hier kann man annehmen, die gesuchte Zahl sey 12, die Hälfte davon ist 6, der dritte Theil 4, der vierte 3, die Summe dieser Zahlen ist 25; folglich hat man die richtige Zahl getroffen. Nun kann man dieselbe finden, wenn man schliesset, $25 : 60 = 12 : 28\frac{4}{5}$, denn von dieser Zahl ist die Hälfte $14\frac{2}{5}$, der dritte Theil $9\frac{3}{5}$, der vierte Theil $7\frac{1}{5}$, diese Theile aber geben zu der Zahl $28\frac{4}{5}$ selbst eine Summe von 60.

§. 78. **Von der Kettenregel** — der Grund der Kettenregel ist die Zusammensetzung mehrerer Verhältnisse, wie in den Anfangsgründen der Algebra §. 59 gezeigt wird. Die Auflösungsart wird sich besser durch Beyspiele als Regeln zeigen lassen. Sie ist nicht viel von

der,

der, die wir §. 71 für die Regel von fünfen angeführt haben, unterschieden.

3. Ex. Wenn 4 Pfen. = 1 Kr. 3 Kr. = 1 Gr. 20 Gr. = 1 Fl. 15 Fl. = 3 Duc. so fragt sich, wie viel Pfen. auf einen Ducaten gehen. Wenn man nun folgende Proportionen macht, so sieht man leicht, daß hier eine Zusammensetzung der Verhältnisse statt findet.

4 : 1 = Pf: Kr.
3 : 1 = Kr: Gr.
20 : 1 = Gr: Fl.
15 : 3 = Fl: Duc.

---

4 × 3 × 20 × 15 : 3 = Pf: Duc.
4 × 20 × 15 : 1 = Pf: Duc.
1200 : 1 = Pf: Duc.

Bey Ansetzung der gegebenen Glieder in zwoen Reihen muß man folgende **Ordnung** beobachten. Man fängt mit eben der Sache an, von welcher die Frage ist, und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit der das folgende Verhältniß angefangen, und dieselbe mit einer dritten wieder verglichen wird, so

daß ein jedes Verhältniß mit eben der Sache wieder anfängt, mit welcher das vorige aufgehört hat. Auf diese Weise fährt man fort, bis man auf diejenige Sache kömmt, in welcher die Antwort stehen soll. Die nachstehenden Beyspiele werden diese Regel deutlicher machen.

Auch hier kann man die oben angeführten Vortheile (§. 71. Anm.) zur Abkürzung der Rechnung anwenden, wenn sich nämlich irgend ein Glied in der einen Reihe gegen eines in der andern Reihe aufheben läßt, da man dann die Glieder ausstreicht, und an ihre Stelle die Quotienten setzt, die man durch diese Aufhebung erhält.

Exempel. Ein wienerischer Kaufmann soll 4950 Ducati di Banco auf Venedig überschicken. Er verrichtet solches über Augspurg. Es gelten aber 98 Thaler Wienergeld in Augspurg 100 Thaler, und 183 Fl. Augspurgergeld gelten in Venedig 100 Ducati di Banco. Es ist die Frage, wie viel der Kaufmann in Wienn zu erlegen habe.

	4950 Duc. di Banc.
100 Ducati =	x83 Fl. in Augsp. 61
3 Fl. =	2 Thaler.
100 Thaler wien. =	98 in Augspurg.

$$100 \times 10 = 495 \times 61 \times 2 \times 98$$
$$1000 = 5918220$$

Beiderseits mit 100 dividirt, ist die verlangte Zahl von Gulden = 5918 $\frac{22}{100}$ Fl., welchen Bruch man leicht zu Kr. und Pfen. machen kann.

Es ist aber sonderlich in diesen Arten von Rechnungrn zu beobachten, daß, wenn irgend eine Art von Geld in Gulden, Groschen oder Kr. vorkömmt, man dieses alles zu Fl. machen müsse. Z. Ex. Da ein baierischer Thaler 2 Fl. 24 Kr. gilt, so könnte man statt 24 Kr. 8 Groschen setzen, und diese wären = $\frac{8}{20}$ Fl.

Exempel. Man fragt, wie viel 1000 Ducaten in baierischen Thalern betrügen; so setze man

x Duc. =

	1000 Duc.
1 Duc. =	5 Fl. × 20
$\frac{48}{20}$ $2\frac{8}{20}$ Fl. =	1 baier. Thal.

$$48 = 1000 \times 5 \times 20$$
$$48 = 2\,00\,000$$

Beiderseits mit 48 dividirt, erhält man $2083\frac{16}{48} = 2083\frac{1}{3}$ baierische Thaler.

Verlangte man zu wissen, wie viel baierische Thaler eine Anzahl von Gulden ausmachte, ohne daß noch etwas übrig bliebe, so wäre

1	1 Fl.
$\frac{48}{20}$ $2\frac{8}{20}$ Fl.	1 baier. Thlr. × 20

48 Fl. = 20 baier. Thlr.

Nach der Regel de Tri wäre hier Fl. : baier. Thlr. = 1 : $2\frac{8}{20}$, und das Product der äußern wäre $2\frac{8}{20}$ Fl. = 1 baier. Thlr. oder $\frac{48}{20}$ Fl. = 1 baier. Thlr. beiderseits mit 20 multiplicirt 48 Fl. = 20 baier. Thlr. wie vorher.

Exem-

Exempel. Wenn die Ducaten in Hamburg 1 Procent beßer sind als zween Rthlr. banco (das ist, wenn 50 Ducaten nicht 100 sondern 101 Rthlr. banco machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. poln. ist (das ist 1 Rthlr. banco macht 119 Gr. poln.), wiel machen 1000 Ducaten in Fl. poln. (30 Gr. poln. machen 1 Fl. poln.)

	1000 Duc.
1 Duc. =	2 Rthlr. banco
100 Rthlr. banco =	101 Rthlr.
1 Rthlr. =	119 Gr. poln.
30 Gr. poln. =	1 Fl. poln.

$$3\ x = 2 \times 101 \times 119 = 24038$$

Oder beiderseits durch 3 dividirt $x = 8012\frac{2}{3}$ Fl. poln.

Exempel. Man kauft 1 Fuder Wein um 100 Fl. wie viel kostet die Maaß? (Man rechnet hier, wie am Rhein gebräuchlich, 9 Ohmen auf 1 Fuder und 80 Maaß auf eine Ohm).

Ohm). Da die Maaß, wie man gleich sieht, keinen Fl. kosten kann, so fange man mit Kr. an, und höre auch damit auf.

1 Maaß	x Kr.
1 Ohm	8Ø Maaß
1 Fuder	9 Ohm
1ØØ Fl.	1 Fuder
60 Kr.	1 Fl.

$$60 \times 10 = 8 \times 9 \times x$$
$$600 = 72\,x$$

Beiderseits mit 72 dividirt, ist $x = 8\frac{1}{3}$ Kr., das eine Maaß kostet. Wenn man sehen will, ob man recht gerechnet, so nimmt man an: Eine Maaß kostet $8\frac{1}{3}$ Kr. und sucht was ein Fuder kosten werde. Ist die Rechnung richtig, so müssen in diesem Falle 100 Fl. heraus kommen, die das Fuder gekostet hat, wie wir zuvor wissen.

Exempel. Ein paar Ochsen haben 250 Fl. gekostet, und beide haben 16 Centner ge-

wogen. Man fragt, wie hoch das Pfund zu stehen gekommen.

1 Pf.	x Kr.
1 Cent. =	100 Pf.
1 paar Ochs. =	16 Cent.
250 Fl. =	1 paar Ochsen.
60 Kr. =	1 Fl.

$$25 \times 6 = 16\ x$$
$$150 = 16\ x$$

Beiderseits mit 16 dividirt, ist $x = 9\frac{6}{16} = 9\frac{3}{8}$.

Mehrere Beyspiele dieser Art kann man in Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra, wie auch in Fr. Johann Michael Schwarzers Arithmetica Mercatorum ꝛc. finden.

Zweyte Abtheilung

Auszug aus den Anfangsgründen der Buchstabenrechnung.

§. 1.

Erklärung der Buchstabenrechnung. — Die Buchstabenrechnung drückt die Größen durch allgemeine Zeichen, nämlich durch Buchstaben aus, und lehrt, wie man mit denselben die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichten kann. Z. B. 30 kann durch a oder b oder einen andern Buchstaben ausgedrückt werden. Man pflegt aber die gegebenen Größen mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, d, ꝛc. die unbekannten mit den letzten x, y, z zu benennen.

Anm. Die Zeichen, derer man sich in der Buchstabenrechnung bedienet, sind die nämlichen, die wir oben in deren Ausz. der Arithm. §. 7. angeführt haben.

§. 2.

§. 2. **Erklär. der positiven oder negativen Größen** — Entgegengesetzte Größen heißt man diejenigen, derer eine die andere vermindert, wenn man sie zusammen betrachtet. Zu einem Beyspiel dienen Vermögen und Schulden; denn die Schulden vermindern das Vermögen, und durch Vermögen können auch Schulden vermindert werden. Eine dieser entgegen gesetzten Größen, welche man will, nennet man **bejahend**, oder **positiv**, und setzt derselben das Zeichen + vor; z. B. + a. die andere nennt man **verneinend** oder **negativ**, und setzt ihr das Zeichen — vor. Z. B. — a. Dieser Begriff ist in den Anfangsgründen der Algebra I Abschn. mehr auseinander gesetzt worden.

Anm. Bey der Buchstabenrechnung wird im Anfange, wenn kein Zeichen vorhanden ist, allezeit + verstanden. Z. B. a wäre so viel als + a. Sollte aber die Größe im Anfange einer Reihe negativ seyn, so muß — davorstehen.

§. 3. **Erkl. der Coefficienten.** — Die Zahlen, welche einer Größe vorgesetzt werden, und anzeigen, wie oft der Buchstabe, der die Größe ausdrückt, genommen werde, heißt man **Coefficienten.** Z. B. 2 a, 3 b, wo 2 und 3 die Coefficienten sind. Eine einzelne Größe a ist so viel als 1 a, und — b so viel als — 1 b.

§. 4. **Erkl. der gleichnahmigen oder gleichartigen Größen.** — Ausdrücke der Größen, die aus dem nämlichen Buchstaben bestehen, und auf die nämliche Art zusammen gesetzt sind, heißt man **gleichnahmig**, oder **gleichartig.** Z. B. 3 b c und — b c, oder + b d e und — 2 d e b sind gleichartig; nicht aber b c und $\frac{b}{c}$; noch minder 2 a und a a.

§. 5. **Aufg. Die Buchstabengrößen zu reduciren, oder sie zum kürzesten Ausdrucke zu bringen.**

Aufl.

Aufl. A. Wenn Größen zu reduciren sind, die nicht gleichartig oder gleichnahmig sind.

Man setze die Ausdrücke, und die Buchstaben eines jeden Ausdrucks, so viel als möglich ist, nach der Ordnung des Alphabets. Z. B. die Ausdrücke c b + f e + b a c + d werden a b c + b c + d + e f geschrieben.

B. Wenn gleichartige oder gleichnahmige Größen zu reduciren sind.

I. Wenn mehrere gleichartige Größen einerley Zeichen haben, so zähle man sie zusammen, und setze vor die Summe ihren Coefficienten vor. Z. E. a + a + b + 2 b wird durch die Reduction in 2 a + 3 b abgeändert.

II. Wenn gleichartige Größen entgegen gesetzt sind, und also die eine positiv ist, oder das Zeichen +, die andere negativ ist, oder das Zeichen — hat, und beiderseits gleich sind, so heben sie sich auch. Z. E. 2 — 2 = 0; oder a b — a b = 0, oder b — b c + b c — b = 0.

Ist einer von den entgegen gesetzten gleichartigen Ausdrücken größer als der andere, so subtrahire man den kleinern Ausdruck von dem größern, und setze vor dem Ueberrest das Zeichen des größern. Z. B. $4ab - ab = 3ab$; $bc - 3bc = -2bc$.

§. 6. Aufg. **Ungleiche entgegen gesetzte Größen zu addiren.**

Aufl. Man ziehe die kleinere Größe von der größern ab, und setze vor dem Rest das Zeichen der größern. Z. Ex. 6 und $-5 = 1$; 4 und $-7 = -3$.

Sind allgemeine Größen zu addiren, so geschieht es nach der nämlichen Regel.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 3a - 4b + 4f + g \\ 2a - 3b - 2f - 5g \\ \hline 5a - 7b + 2f - 4g \end{array}$$

*

$$\begin{array}{r} 5a + b - 3c - 4d \\ -2a + 8b - c + 4d \\ \hline 3a + 9b - 4c \end{array}$$

Kommen bey der Addition verschiedene positive und negative Größen vor, die einerley Buchstaben haben, oder gleichnahmig sind, so reducire man sie Anfangs, und alsdann sehe man, was die Summe beider giebt. Z. Ex. Soll 5 a — 3 b — 2 a zu 7 b — 7 a + a addiret werden, so wäre

$$\begin{array}{r} 3\,a - 3\,b \\ -\,6\,a + 7\,b \\ \hline -\,3\,a + 4\,b \end{array}$$

Wenn man verschiedene Buchstaben; das heißt, Größen, die nicht von einerley Art sind, zu addiren hat, so setze man bloß die Buchstaben mit ihren Zeichen zusammen. Z. E.

$$\begin{array}{l} 2\,a - 3\,b - 4\,g \\ 3\,a + 2\,d - 4\,f \\ \hline 5\,a - 3\,b + 2\,d - 4\,g - 4\,f \end{array}$$

Anm. Alle diese Beyspiele können erläutert werden, wenn man statt der Buchstaben genannte Zahlen setzt.

8 Fl.	+	4 Gr.	—	7 Kr.	+	2 Pf.
3 Fl.	—	11 Gr.	—	1 Kr.	+	5 Pf.
11 Fl.	—	7 Gr.	—	8 Kr.	+	7 Pf.

§. 7. Aufg. Größen, die mit einerley oder verschiedenen Zeichen geschrieben sind, zu subtrahiren.

Aufg. Man verändere alle Zeichen der Zahl, die subtrahirt werden soll, in die entgegen gesetzten, und addire die gegebenen Größen. Die herauskommende Zahl wird die Differenz seyn. Z. E.

$$\begin{array}{cccc} 5 & -8 & +3 & -2 \\ 3 & -3 & -5 & +4 \\ - & + & + & - \\ \hline 2 & -5 & +8 & -6 \end{array}$$

Die Zeichen in der dritten Reihe sind die, welche in die entgegen gesetzten verwandelt worden sind, um nach der gegebenen Regel addiren zu können.

Ein anders Exempel.

$$\begin{array}{r} 5a - 3b + c - 9d \\ \hline 2a + 3b + c - 8d + e \\ - \quad - \quad - \quad + \quad - \\ \hline 3a - 6b \qquad - \quad d - e \end{array}$$

Wenn eine Größe aus zweyen Stücken bestehet, und das zweyte von dem ersten subtrahirt ist, so wird die Subtraction so verrichtet, daß man das erste Stück subtrahirt, und das andere wieder addirt. Z. E. $15 - (8 - 4) = 15 - 8 + 4 = 11$. Es ist also auch $12 - (7 - 20) = 12 - 7 + 20 = 25$. Und $a - (b - d) = a - b + d$.

§. 8. Aufg. Allgemeine oder in Buchstaben ausgedrückte Größen miteinander zu multipliciren.

Aufl. I. Wenn zween Factores einerley Zeichen haben, es sey nun + oder —, so bekömmt das Product auch +. Z. E. $+4 \times +2 = +8$. Haben sie aber verschiedene Zeichen, so bekömmt das Product —. Z. E. $+4 \times -2 = -8$.

II. Wenn vor dem Buchstaben Coefficienten gesetzt sind, so multiplicire man sie nach den gemeinen Regeln der Multiplication, die Buchstaben aber setze man nebeneinander z. E. $3a \times 2b = 6ab$.

III. Wenn eine Complexe oder aus mehrern Ausdrücken bestehende Größe mit einer einfachen multipliciret werden, so multiplicire man durch diese alle Glieder der complexen Größe. Z. E. $(a - b + c) \times d = ad - bd + cd$. Die complexen Größen multipliciret man untereinander wie die Zahlen. Z. E.

$$\begin{array}{l} a - b + c \\ d - f \\ \hline ad - bd + cd \\ \quad - af + bf - fc \\ \hline ad - bd + cd - af + bf - fc \end{array}$$

Noch ein anders Exempel.

$$\begin{array}{r} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 2aa + 6ac - 2ad \\ - ad - 3cd + dd \\ \hline 2a^2 + 6ac - 3ad - 3cd + dd \end{array}$$

Anm. Anstatt aa kann man auch a^2 und statt aaa kann man a^3 schreiben, welcher Ausdruck das Quadrat oder den Würfel von a anzeiget.

§. 9. Aufg. Allgemeine Größen in einander zu dividiren.

In Ansehung der Zeichen ist die nämliche Regel wie in der Multiplication zu beobachten. Haben der Divisor und Dividendus einerley Zeichen, so geben sie für den Quotienten +; haben sie aber verschiedene, so ist der Quotient —. Im übrigen werden die Zahlen auf die gewöhnliche Art dividirt. Z. E.

$$\frac{+8}{-2} = -4. \quad \frac{-12}{-3} = +4.$$

Man

Man sieht hier auch, daß, wenn der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt wird, der Dividendus mit seinem vorgesetzten Zeichen wieder heraus komme. Z. E. $-2 \times -4 = +8$.

Sind in allgemeinen Größen einerley Buchstaben im Divisor und Dividendus enthalten, so werden diese ausgestrichen, und was alsdann übrig bleibt, ist der Quotient. Z. E. $\frac{ab}{a} = b$; $\frac{abc}{ab} = c$; $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{6ab}{2b} = 3a$; $\frac{2bc}{3b} = \frac{2}{3}c$.

Bestehet der Divisor und Dividendus aus verschiedenen Buchstaben, so wird die Division nur angezeigt. Z. E. a dividirt durch b giebt $\frac{a}{b}$

Wenn der Dividendus aus mehreren Gliedern bestehet, der Divisor nur aus einem, so wird jedes Glied des Dividendus dividirt, der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, und das Product vom Dividendus abgezogen.

Di=

Divisor Dividendus Quotient.

$$
\begin{array}{r|l|l}
a & ab - ad + ag & b - d + g \\
 & ab - ad + ag & \\
 & - \quad + \quad - & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Wenn der Divisor nicht einzeln ist, so wird das erste Glied des Dividendus mit dem ersten des Divisors dividirt, und der ganze Divisor in den Quotienten multiplicirt. Ueberhaupt verfährt man hier auf die Art, wie in der Division mit Zahlen. Z. E.

$$
\begin{array}{r|l|l}
a + b & aa - bb & a - b \\
 & aa + ab & \\
 & - \quad - & \\
\hline
 & - ab - bb & \\
 & - ab - bb & \\
 & + \quad + & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Noch

Noch ein Beyspiel.

$$a - b - c \mid aa - bb - 2ac + cc \mid a + b - e$$

$$aa - ab - ac$$

$$+ ab - bb - ac$$

$$ab - bb - bc$$

$$- ac + be + cc$$

$$- ac + bc + ce$$

$$0$$

Man muß allemal wohl in acht nehmen, daß, wenn man subtrahirt, die Zeichen in entgegen gesetzte verwandelt, und addirt werden.

§. 10. Alle Veränderungen, die in der Buchstabenrechnung mit **Brüchen** vorgenommen werden, geschehen nach den Regeln, die schon im Auszuge der Arithmetik im II. Abschnitt gelehret worden. Man darf also nur Beyspiele hersetzen.

I. Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \; \frac{bc}{bd}$$

II. Brüche zu addiren; z. B. die vorigen

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

III. Brüche zu subtrahiren

$$\frac{ad - bc}{bd}$$

IV. Brüche zu multipliciren. Es geschiehet ebenfalls nach den in der Arithmetik gegebenen Regeln. Nur muß man in Ansehung der Zeichen bemerken, daß, wenn — sich auf den ganzen Bruch beziehet, es zur Seite des Bruchs stehe, z. B. $-\frac{a}{b}$, oder bey dem Zähler und Nenner $\frac{-a}{-b}$. Beziehet es sich aber allein auf den Zähler, oder allein auf den Nenner, so stehet es vor jedem, auf

den

den sich das Zeichen beziehet. Z. E. $\frac{-a}{b}$. Hier hat der Nenner allein das Zeichen —.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

*

$$\frac{a}{-f} \times \frac{-g}{h} = \frac{-ag}{-fh}$$

V. Brüche zu dividiren.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

*

$$\frac{f}{g} : \frac{-h}{m} = \frac{f}{g} \times \frac{m}{-h} = \frac{fm}{-gh}$$

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Auszug aus den Anfangsgründen der Arithmetik und Buchstabenrechnung Zum Gebrauch der niedern Schulen in den churbaierischen Landen

München [1776]

Math.p. 16 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081400-4
VD18 90239318